

# 例外集合が既約な特異点解消を持つ 3次元カスプ特異点

土橋 宏康

平成 28 年 11 月 12 日

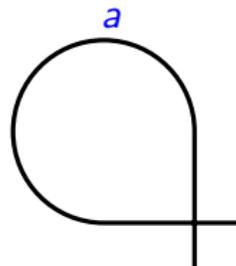
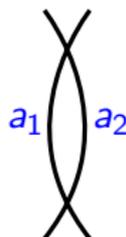
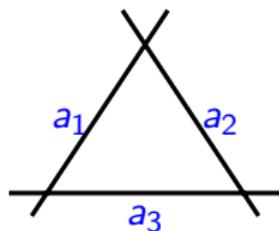
- [1] T. Oda, Convex Bodies and Algebraic Geometry, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge-Band 15, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987.
- [2] H. Tsuchihashi, Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities, Tohoku Math. J. 35 (1983), 607-639.

# 2次元カスプ特異点

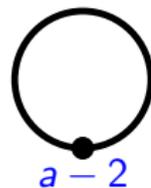
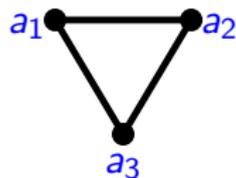
2次元カスプ特異点  $\iff$  特異点解消の例外集合が有理曲線の輪

例外集合

(自己交点数)



双対グラフ



$$\forall a_i \leq -2,$$

$$\exists a_j < -2$$

$$a < -1$$

## 3次元カスプ特異点

$(V, p)$  : 3次元カスプ特異点

$\implies \exists (U, E) \rightarrow (V, p)$  : 特異点解消、 $U$  は非特異、

例外集合  $E$  の特異点は正規交差のみ、

$E$  の各既約成分の正規化は非特異トーリック曲面であり、

$E$  の双対グラフはコンパクト位相曲面の三角形分割。

注  $X$  : 非特異トーリック曲面  $\supset T \simeq (\mathbf{C}^\times)^2$ ,  $X \setminus T$  : 有理曲線の輪  
非特異トーリック曲面は  $\mathbf{P}^2$  または Hirzebruch 曲面 ( $\mathbf{P}^1$  上の  $\mathbf{P}^1$  束) を  
blow up して得られる。

目的  $E$  が既約 (双対グラフの頂点が一つ) なものがどの位あるか知りたい。

## 定理 1.1

オイラー数が  $-1$  のコンパクト位相曲面上の頂点が一つの三角形分割は 11 通りあり、そのいずれもが、ある 3 次元カスプ特異点の特異点解消の例外集合の双対グラフとなる。

## 定理 1.2

任意の負の偶数 (resp. 負の整数)  $e$  に対して、次の条件をみたす特異点解消を持つ 3 次元カスプ特異点が存在する。

- (i) 例外集合は既約である。
- (ii) 例外集合の双対グラフはオイラー数が  $e$  の向き付け可能 (resp. 不可能) なコンパクト位相曲面の三角形分割である。

双対グラフが実トーラスの三角形分割となる (Hilbert modular 型カスプ特異点) とき、頂点は 2 つ以上になる。

# 非特異扇

$$N = \mathbf{Z}^n$$

$$\sigma(L) := \mathbf{R}_{\geq 0}v_1 + \mathbf{R}_{\geq 0}v_2 + \cdots + \mathbf{R}_{\geq 0}v_s \quad \text{for } L = \{v_1, v_2, \dots, v_s\} \subset N$$

$$\sigma(\emptyset) = \{0\}$$

$\Sigma$  : 非特異扇  $\Leftarrow$

$$\Sigma \ni \forall \sigma = \sigma(L) \text{ for } \exists L \subset \exists \{v_1, v_2, \dots, v_n\} : N \text{ の基底} \\ (\implies \sigma \text{ は強凸有理錐})$$

$$\tau \prec \sigma \in \Sigma \implies \tau \in \Sigma \quad (\sigma(K) \prec \sigma(L) \iff K \subset L)$$

$$\sigma, \tau \in \Sigma \implies \sigma \cap \tau \prec \sigma, \tau$$

$\implies \exists X$  : 非特異トーリック多様体  $\supset T \simeq (\mathbf{C}^*)^n$

$$X \setminus T \text{ の双対グラフ} = \{p(\sigma \setminus \{0\}) \mid \{0\} \neq \sigma \in \Sigma\} \quad (\text{単体復体})$$

$$(p : N_{\mathbf{R}} \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1} = (N_{\mathbf{R}} \setminus \{0\}) / \mathbf{R}_{>0})$$

### 3次元カスプ特異点を定義する扇と群

$$N = \mathbf{Z}^3$$

$N$  の非特異扇  $\Sigma$  と  $GL(N)$  の部分群  $\Gamma$  が条件

- $C (= \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma \setminus \{0\})$  : 開強凸錐、  
(\* )  $\Sigma$  :  $\Gamma$ -不変、 $\Gamma$  の  $\Sigma$  への作用の固定点は  $\{0\}$  のみ、  
 $\Sigma/\Gamma$  : 有限、 $\Gamma$  は  $\Sigma^1 (= \{\sigma \in \Sigma \mid \dim \sigma = 1\})$  へ推移的に作用

( $\implies$   $\Gamma$  は  $D_C (:= C/\mathbf{R}_{>0})$  に固有不連続、固定点なしに作用し、  
 $D_C/\Gamma$  はコンパクト)

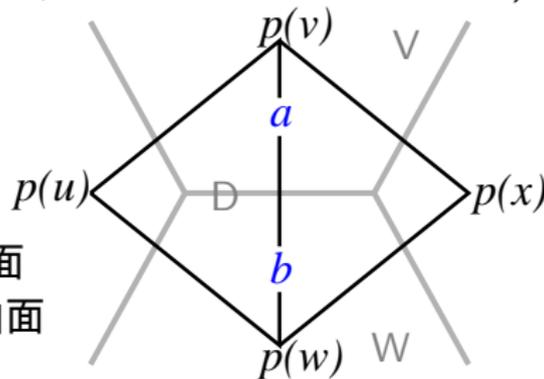
をみたせば、孤立特異点  $(V, p)$  とその特異点解消  $(U, E) \rightarrow (V, p)$  で例外集合  $E$  が既約なもの得られる。

$X$  :  $\Sigma$  から得られるトーリック多様体  $\supset \exists \tilde{U} \supset \tilde{E} = X \setminus T$ ,  
 $\Gamma$  は  $\tilde{U}$  に固有不連続、固定点なしに作用、 $U = \tilde{U}/\Gamma \supset E = \tilde{E}/\Gamma$

# 例外集合の重み付き双対グラフ

$\tilde{\Delta} := \{p(\sigma \setminus \{0\}) \mid \sigma \in \Sigma, \sigma \neq \{0\}\} : \Gamma$ -不変な  $D_C$  の三角形分割  
 $\sigma(\{u, v, w\}), \sigma(\{v, w, x\}) \in \Sigma$  ( $u, v, w, x$  は相異なる  $N$  の原始元)

$$\begin{aligned} \implies u + av + bw + x = 0 \\ \text{for } \exists a, \exists b \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$



$V$  :  $p(v)$  が対応しているトーリック曲面  
 $W$  :  $p(w)$  が対応しているトーリック曲面  
 $D = V \cdot W \implies D|_W^2 = a, D|_V^2 = b$

この  $a, b$  を辺  $p(\sigma(\{v, w\} \setminus \{0\}))$  上のそれぞれ頂点  $p(v), p(w)$  側の **Z-weight** とする ([1] では double **Z-weight**)。

$\Delta = \tilde{\Delta}/\Gamma$  : コンパクト位相曲面上の**頂点が一つ**の三角形分割

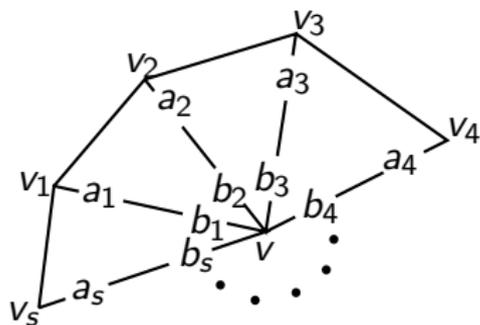
上の **Z-weight** は  $\Gamma$  の作用で不変  $\implies \Delta$  上の **Z-weight** が定まる。

**この Z-weight は次の条件 (M) と (C) をみtas。**

# 条件 (M)

(M)  $\Delta$  の各頂点に集まる边上の  $\mathbf{Z}$ -weight  $a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_s$  (下図参照) が次の条件をみたす。

$\exists v, v_1, \dots, v_s \in N$  s.t.  $\{v_i, v_{i+1}, v\}$  : a basis of  $N$  ( $v_{s+1} = v_1$ ),  
 $v_{i-1} + a_i v_i + b_i v + v_{i+1} = 0, \quad v_1, \dots, v_s$  は  $v$  の周りを丁度一回り



$$(v_{i-1}, v_i, v) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -a_i & 0 \\ 0 & -b_i & 1 \end{bmatrix} = (v_i, v_{i+1}, v)$$

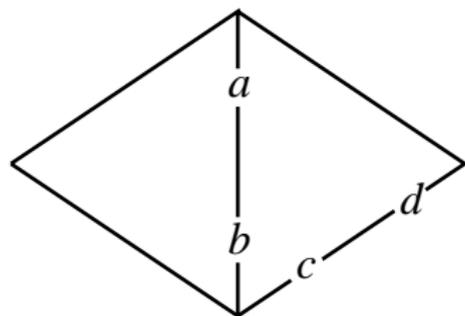
$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^s a_i = 12 - 3s$  かつ

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -a_1 & 0 \\ 0 & -b_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -a_2 & 0 \\ 0 & -b_2 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -a_s & 0 \\ 0 & -b_s & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

である。

## 条件 (C)

(C) 各辺上の二つの整数の和は  $-2$  以下であり、 $-2$  ならば、その  $Z$ -weight は二つとも  $-1$  であり、その辺を含む三角形の他の辺上の  $Z$ -weight の和は  $-2$  より小さい。



$$a + b \leq -2$$

$$a + b = -2 \implies a = b = -1$$

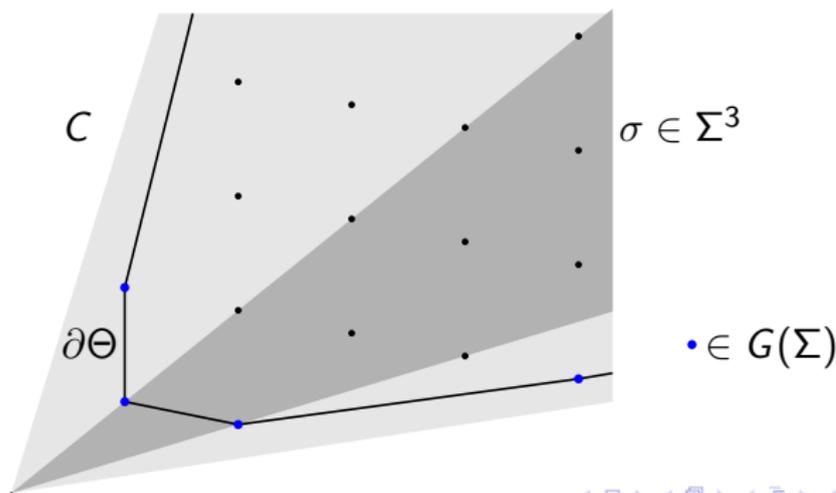
$$c + d < -2$$

# (\*) をみたす $\Sigma$ と $\Gamma$ から得られる $\Delta$ 上の $\mathbb{Z}$ -weight が条件 (C) をみたすことの証明

$G(\Sigma) := \{n \in N \mid \mathbf{R}_{\geq 0} n \in \Sigma, n : \text{primitive}\}$   
 $\implies \Gamma$  は  $G(\Sigma)$  に推移的に作用

$\Theta : C \cap N$  の凸胞  $\implies \{\partial\Theta \text{ の頂点}\} = G(\Sigma)$

$\because G(\Sigma)$  以外の  $C \cap N$  の元  $x$  は  $G(\Sigma)$  の元の一次結合で、  
係数の和が 2 以上  $\implies x \in \text{Int}(\Theta) \implies \{\partial\Theta \text{ の頂点}\} \subset G(\Sigma)$



# 証明の続き $u + av + bw + x = 0 \implies a + b \leq -2 \dots$

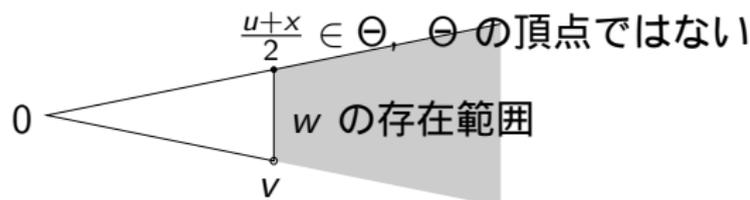
$u, v, w, x \in G(\Sigma)$  ( $\implies u, v, w, x$  は  $\partial\Theta$  の頂点),  
 $\sigma(\{u, v, w\}), \sigma(\{v, w, x\}) \in \Sigma^3$  とするとき、

$$u + av + bw + x = 0$$

$a + b > -2$  ならば、 $a \geq 0$  または  $b \geq 0$  である。

$a \geq 0, b \geq 0$  ならば、 $-x = u + av + bw \in C$  ✗

$a \geq 0, b < 0, a + b \geq -2$  ならば、 $w = -\frac{1}{b}(u + x + av)$ ,  $-\frac{1}{b}(2 + a) \geq 1$   
 $\implies w$  は  $\partial\Theta$  の頂点ではない。 ✗



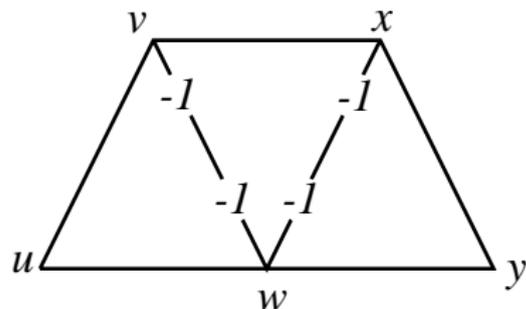
$\implies a + b \leq -2,$

$a + b = -2$  ならば  $a = b = -1$  ( $\because a < 0, b < 0$ )

## 証明の続き (左下図は起きない)

$\sigma(\{u, v, w\}), \sigma(\{v, w, x\}), \sigma(\{w, x, y\}) \in \Sigma^3 \quad (u, v, w, x, y \in G(\Sigma))$

$u + x - v - w = v + y - x - w = 0$  と仮定すると  $u + y = 2w$  となり、 $w$  は  $\partial\Theta$  の頂点ではないことになってしまう。



$$u - v - w + x = 0$$

$$v - x - w + y = 0$$

$$\implies u + y = 2w$$

(M) と (C) をみたく Z-weight を持つ頂点が一つの三角形分割から (\*) をみたく非特異扇が得られる

(\*) をみたく非特異扇  $\Sigma$  と  $GL(N)$  の部分群  $\Gamma$  から上記のようにして得られる Z-weight 付き三角形分割を  $\Delta(\Sigma, \Gamma)$  と表す。

[2] より、次が成り立つ。

### 定理 1.3

条件 (M) と (C) をみたく Z-weight を持つコンパクト位相曲面上の頂点  
が一つの三角形分割  $\Delta$  に対して (\*) をみたく非特異扇  $\Sigma$  と  $GL(N)$  の部  
分群  $\Gamma$  で  $\Delta(\Sigma, \Gamma) = \Delta$  となるものが存在する。

# 定理 1.3 の証明の方針

$T$  : コンパクト位相曲面,

$\Delta$  :  $T$  上の三角形分割で (M) と (C) をみたす  $\mathbf{Z}$ -weight を持つ

$\varpi : \tilde{T} \rightarrow T$  : 普遍被覆,  $\tilde{\Delta} : \varpi$  による  $\Delta$  の引き戻し.

$$\tilde{\Delta}^i = \{\alpha \in \tilde{\Delta} \mid \dim \alpha = i\}.$$

$\overline{v_1 v_2 v_3} \in \tilde{\Delta}^2$ ,  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} : N$  の基底を選ぶ。

$\implies \exists f : \tilde{\Delta}^0 \rightarrow N$ ,  $f(v_i) = \mathbf{e}_i$  かつ

$$f(w_1) + af(w_2) + bf(w_3) + f(w_4) = 0 \text{ for } \forall \overline{w_2 w_3} \in \tilde{\Delta}^1,$$

$$\text{where } w_1, w_4 \in \tilde{\Delta}^0 \text{ s.t. } \overline{w_1 w_2 w_3}, \overline{w_4 w_2 w_3} \in \tilde{\Delta}^2$$

$a, b$  は  $\overline{w_2 w_3}$  上のそれぞれ  $w_2, w_3$  側の  $\mathbf{Z}$ -weights

$\Sigma := \{\text{faces of } \sigma(\{w(1), f(w_2), f(w_3)\}) \mid \overline{w_1 w_2 w_3} \in \tilde{\Delta}^2\} : \text{扇}$

$\Gamma := \rho(\pi_1(T)) \subset \text{GL}(N)$  ( $\rho(g)\mathbf{e}_i = \sigma(gv_i)$ ).

この  $\Sigma$  と  $\Gamma$  は条件 (\*) をみたす。

# 定理 1.1 の証明

定理 1.1 は次の命題から従う。

## 命題 1.4

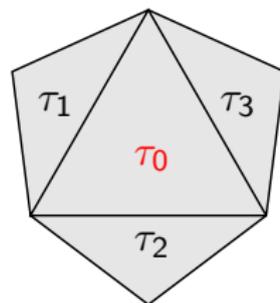
オイラー数が  $-1$  のコンパクト位相曲面上の頂点が一つの三角形分割は 11 通りあり、そのいずれもが、条件 (M) と (C) をみたす  $\mathbb{Z}$ -weight を持つ。

各三角形を次の 3 つの型に分ける

$$(I) \quad \tau_i \neq \tau_j \text{ for } 0 \leq i < j \leq 3$$

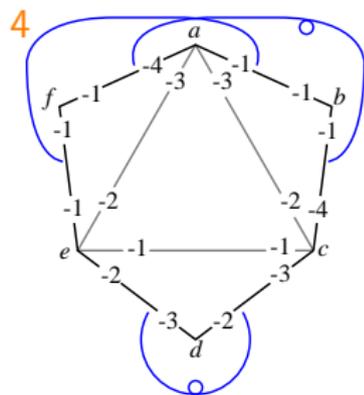
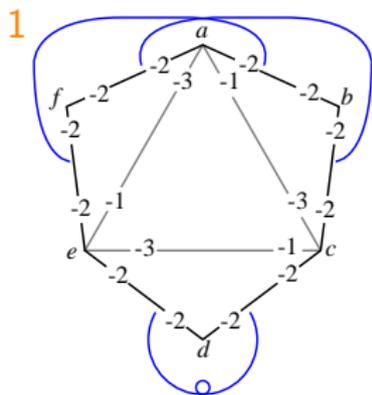
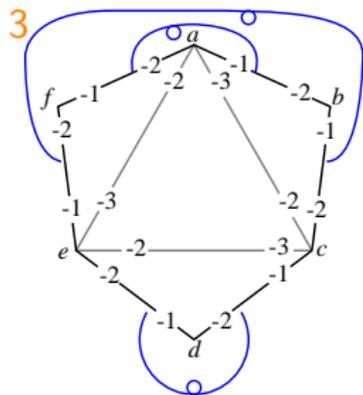
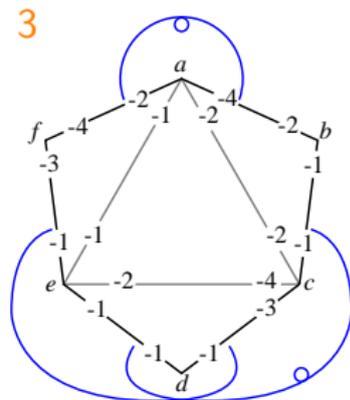
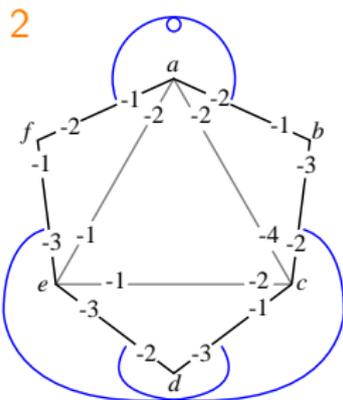
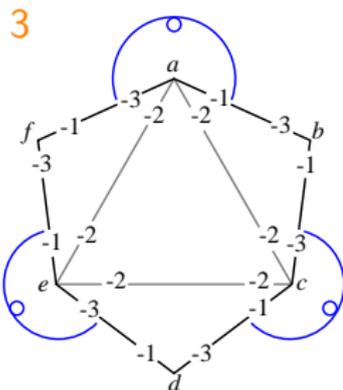
$$(II) \quad \tau_0 \neq \tau_i \text{ for } 1 \leq i \leq 3 \\ \tau_j = \tau_k \text{ for } 1 \leq \exists j < \exists k \leq 3$$

$$(III) \quad \tau_0 = \tau_i \text{ for } 1 \leq \exists i \leq 3$$



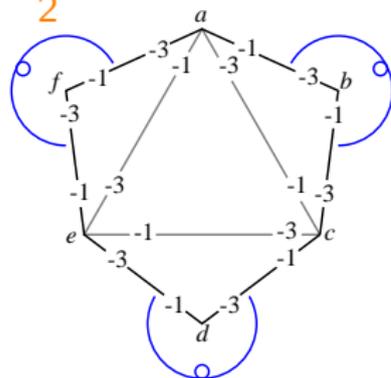
(I)  $\times 4$  が 3 通り, (I) + (II)  $\times 2$  + (III) が 3 通り, (I) + (III)  $\times 3$  が 1 通り,  
(II)  $\times 4$  が 3 通り, (II)  $\times 2$  + (III)  $\times 2$  が 1 通り

# (M) と (C) をみたく Z-weight の一例

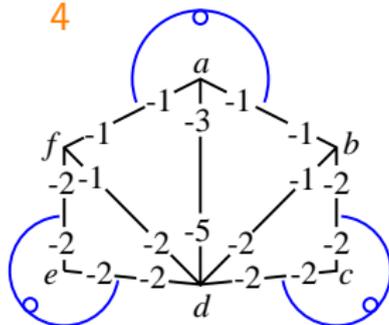


# 赤字は計算機で見つかった個数

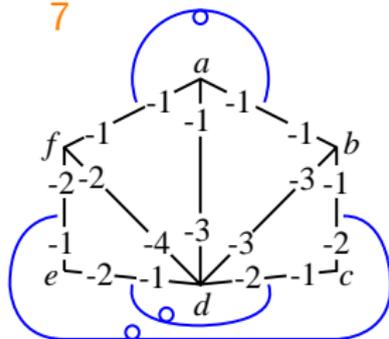
2



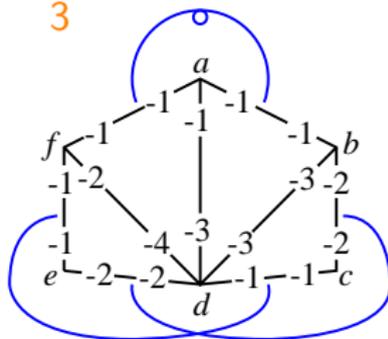
4



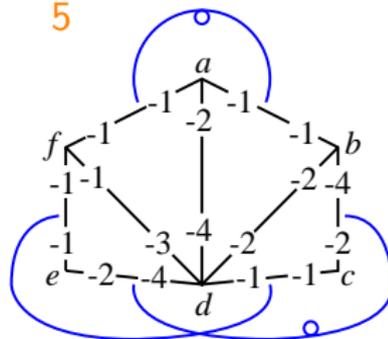
7



3



5





# $a_1, a_2, \dots, a_s$ のみたすべき条件

整数列  $a_1, a_2, \dots, a_s$  に対して次の条件 (M0) を考える。

(M0)  $\sum_{i=1}^s a_i = 12 - 3s$  かつ

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a_s \end{bmatrix} = I_2$$

[1, Corollary 1.29]  $a_1, a_2, \dots, a_s$  が (M0) をみたせば,  $s \geq 3$  であり,  $s = 3$  のときは  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$  であり、

$s = 4$  のときは  $a_i = a_{i+2} = 0, a_{i+1} = b, a_{i+3} = -b$  ( $\exists b \in \mathbf{Z}$ ) であり、

$s \geq 5$  のときは  $-1$  に等しい整数が少なくとも一つは存在し、一つの  $-1$  を取り除き、その両端の整数に  $1$  を加えたものも (M0) をみたす。

例  $-3, -1, -3, -1, -3, -1, -3, -1, -3, -1, -3, -1 \rightarrow$   
 $-1, -1, -1, -1, -1, -1 \rightarrow 1, 1, 1$

$a_i$  が (M0) を満たし、 $a_i, b_i$  が周期的ならば (M) をみたく

### 補題 1.5

$a_1, \dots, a_s$  を条件 (M0) をみたく整数とし、 $b_1, \dots, b_s$  を整数とする。  
 $s$  未満の  $s$  の正の約数  $l$  で

$$a_i = a_j, b_i = b_j \text{ if } i \equiv j \pmod{l}$$

をみたくものが存在すれば、 $a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_s$  は条件 (M) の二番目の等式をみたく。

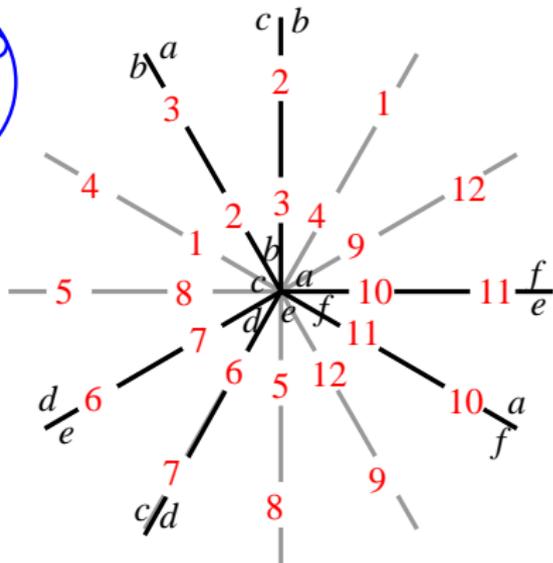
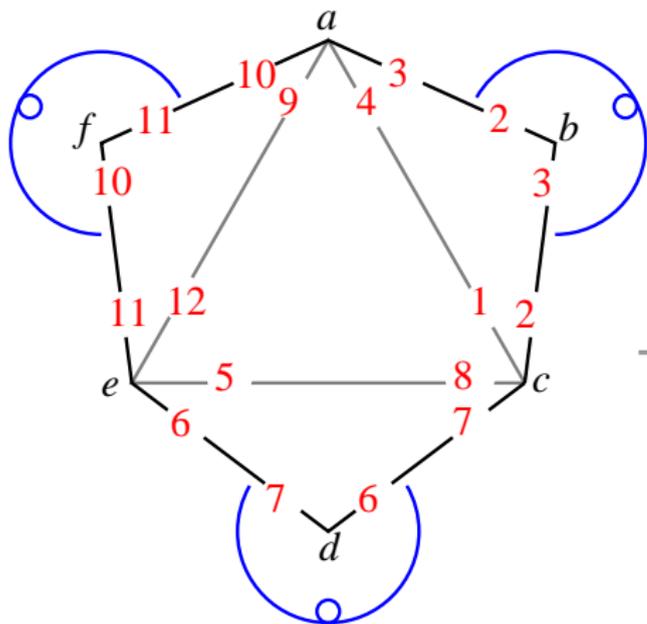
$$M_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -a_i & 0 \\ 0 & -b_i & 1 \end{bmatrix} \text{ とし、 } M_1 \cdots M_l = \begin{bmatrix} A & O \\ B & 1 \end{bmatrix}$$

とすれば  $A \neq I_2, A^{s/l} = I_2 \implies |A - I_2| \neq 0$  ( $\because |A| = 1$ )

$$M_1 \cdots M_s = (M_1 \cdots M_l)^{s/l} = \begin{bmatrix} I_2 & O \\ B(A^{s/l-1} + \cdots + A + I_2) & 1 \end{bmatrix}$$

$$B(A^{s/l-1} + \cdots + A + I_2)(A - I_2) = B(A^{s/l} - I_2) = O, |A - I_2| \neq 0 \\ \implies M_1 \cdots M_s = I_3$$

下図の場合、 $a_i$  が周期的ならば、 $b_i$  も周期的



左上図の三角形分割に対しては条件 (M0) をみだし、さらに  $a_i = a_{i+4} = a_{i+8}$  ( $1 \leq \forall i \leq 4$ ) をみだす整数列  $a_i$  ( $1 \leq i \leq 12$ ) から条件 (M) をみだす  $\mathbf{Z}$ -weight が得られる。

# 条件 (M0) をみたす周期的整数列の存在

オイラー数が  $e$  のコンパクト位相曲面の頂点が一つの三角形分割は頂点に  $6 - 6e$  本の辺が集まる。(三角形は  $2 - 2e$  個、辺は  $3 - 3e$  本。)

## 補題 1.6

(i) (resp. (ii))  $s$  を 12 以上の 6 の倍数とすれば、条件 (M0) と次の二つの条件をみたす整数  $a_1, \dots, a_s$  が存在する。

$$(1) a_i = a_{i+s/2} \text{ for } 1 \leq \forall i \leq s/2$$

$$\text{(resp. } a_i = a_{i+s/3} = a_{i+2s/3} \text{ for } 1 \leq \forall i \leq s/3)$$

(2)  $\forall a_i \leq -1$  であり、 $a_i = -1$  ならば、 $a_{i\pm 1} < -1$  ( $a_0 = a_s, a_{s+1} = a_1$ ) である。

$s = 12$  のときは  $a_1 = -1, a_2 = -3, a_3 = -1, a_4 = -3, \dots$  は条件をみたす。

$s > 12$  のときはこの数列の適切な  $s - 12$  箇所に  $-1$  を挿入し、その前後の数を 1 減ずるという操作によって得られる。

## 定理 1.2 の証明

定理 1.2 は上の二つの補題と次の命題から従う。

### 命題 1.7

任意の負の偶数 (*resp.* 負の整数)  $e$  に対して、オイラー数が  $e$  の向き付け可能 (*resp.* 不可能) なコンパクト位相曲面  $T$  の三角形分割で、次の条件をみたすものが存在する。

- (i) 頂点は一つである。
- (ii) 位数 2 (*resp.* 3) の  $T$  の自己同型で、頂点の十分小さい近傍の向きを保つものがある。

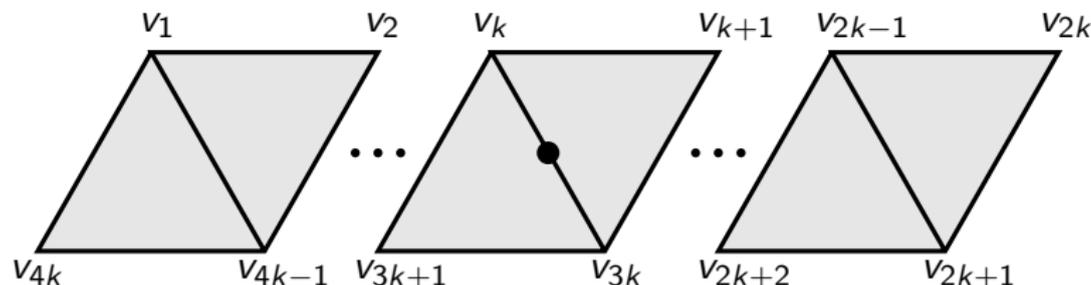
# 命題 1.8 の証明 ( $T$ が向き付け可能な場合)

$e$  を負の偶数とする。下図は  $T$  の展開図である。

三角形は  $2 - 2e$  個

$$k = 1 - \frac{e}{2}$$

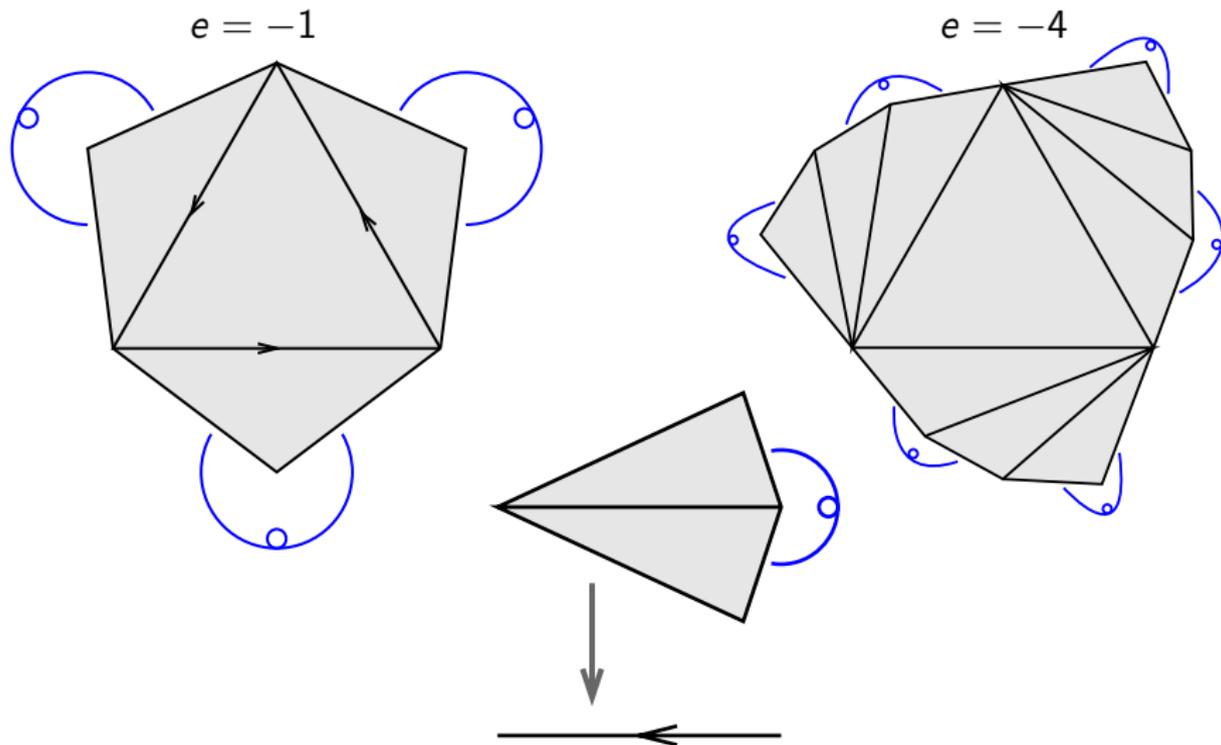
$$\overline{v_i v_{i+1}} \leftrightarrow \overline{v_{i+2k+1} v_{i+2k}}$$



真ん中の点を中心に対称の位置にある辺どうしを向きを保つように張り合わせる。例えば、辺  $v_1 v_2$  と  $v_{2k+1} v_{2k+2}$  を張り合わせるとき  $v_1$  を  $v_{2k+2}$  に  $v_2$  を  $v_{2k+1}$  に重ねる。

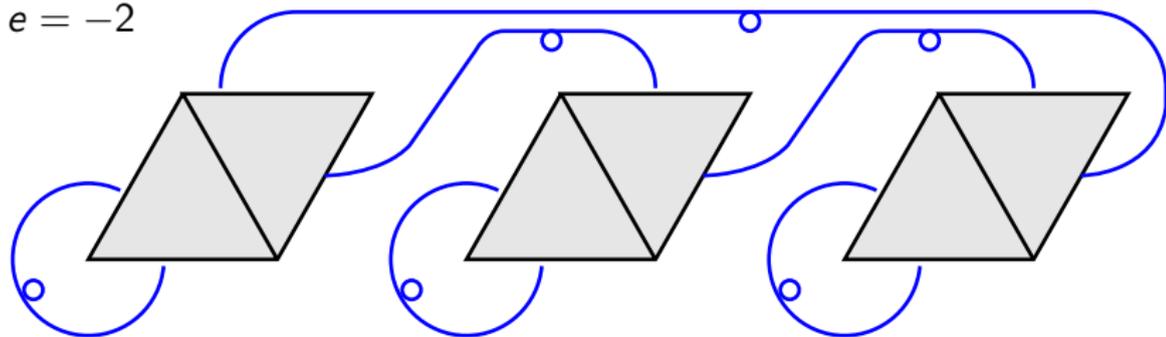
このとき、 $T$  はオイラー数が  $e$  の向き付け可能な曲面となり、 $\Delta$  の頂点は一つである ( $\because \gcd(4k, 2k+1) = 1$ )。また、明らかに位数 2 の向きを保つ自己同型を持つ。

# 命題 1.8 の証明 ( $T$ が向き付け不可能な場合)

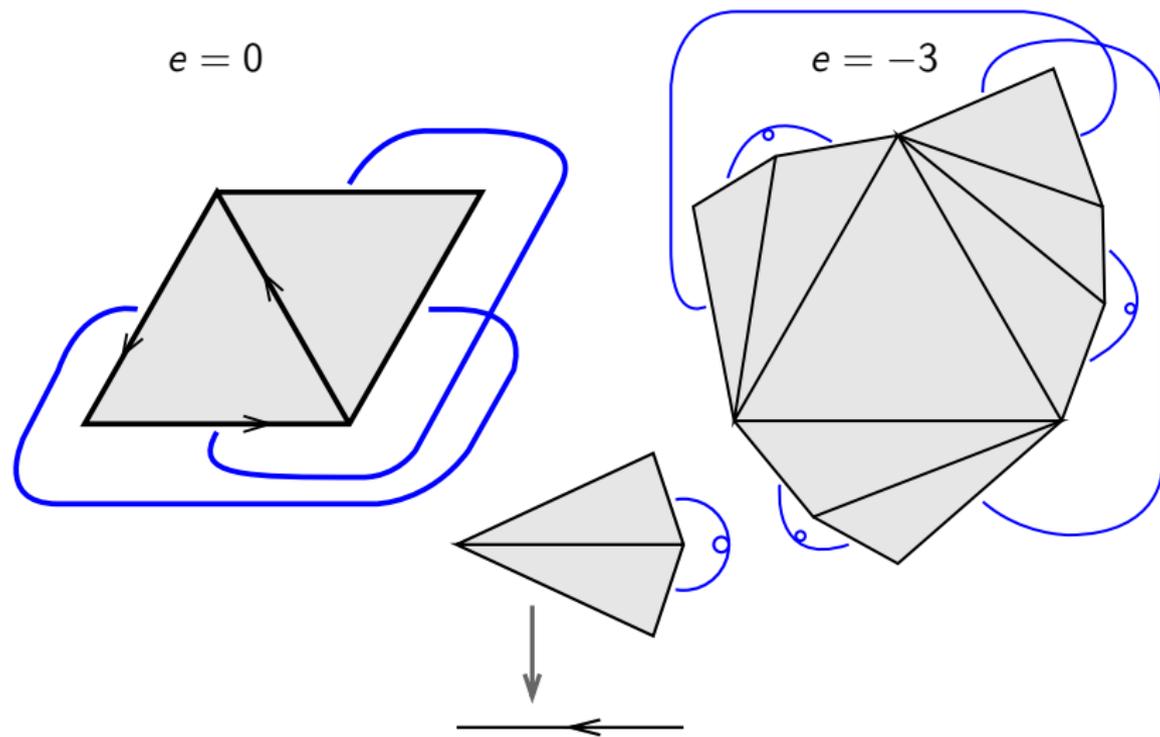


# 命題 1.8 の証明 ( $T$ が向き付け不可能な場合)

$$e = -2$$



# 命題 1.8 の証明 ( $T$ が向き付け不可能な場合)



1. オイラー数が負のコンパクト位相曲面上の頂点が一つの任意の三角形分割は条件 (M) と (C) をみたす  $\mathbb{Z}$ -weight を持つか。
2. 4次元以上では例外集合が既約なものが存在するか。

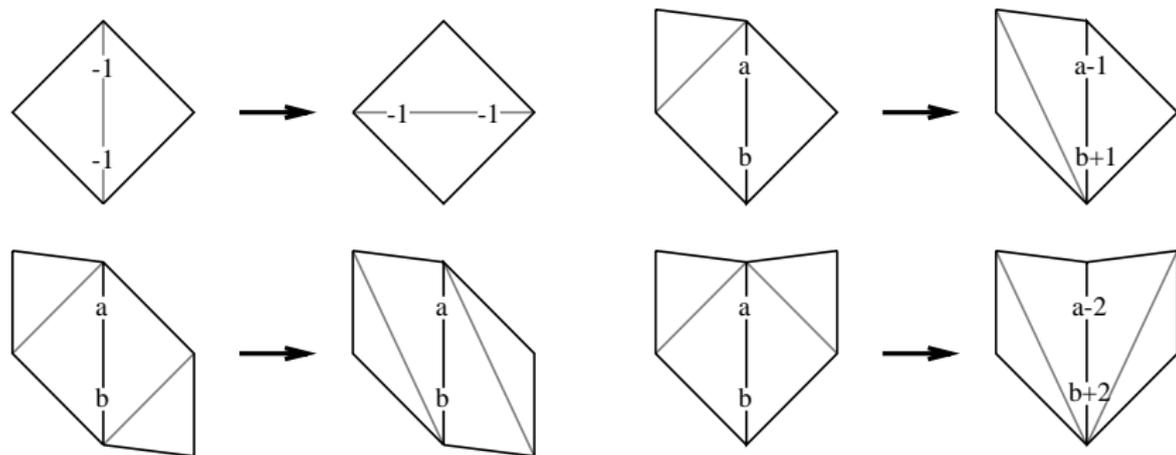
# 双正則な特異点を与える三角形分割

$\Delta$  を  $\mathbf{Z}$ -weight を持つコンパクト位相曲面の三角形分割とし、 $E$  を

$$\Delta_d^1 := \{\alpha \in \Delta^1 \mid \alpha \text{ の上の } \mathbf{Z}\text{-weight がともに } -1\}$$

の空でない部分集合とするとき、

$\Delta(E)$  を  $E$  の各辺に対して、その辺を対角線とする四角形の対角線を取り替え、それに応じて下図のように  $\mathbf{Z}$ -weight を変えたものとする (灰色の線は  $E$  に属す辺)。



# 双正則な特異点を与える三角形分割

$\Delta, \Delta'$  : 条件 (M) と (C) をみたす  $\mathbf{Z}$ -weight を持つ頂点が一つの三角形分割

$(V, \rho), (V', \rho')$  :  $\Delta, \Delta'$  から得られるカスプ特異点

## 命題 1.8

$$(V, \rho) \simeq (V', \rho') \iff \exists E \subset \Delta_d^1 \text{ s.t. } \Delta(E) = \Delta'$$