

三つの二次曲面に関する定理

M を成分が実数の零行列ではない 4 次対称行列とし,

$$\Theta(M) = \{[x : y : z : w] \in \mathbf{P}^3(\mathbf{R}) \mid (x, y, z, w)M^t(x, y, z, w) = 0\}$$

とする。対称行列 M の符号が $(4, 0)$ ならば $\Theta(M)$ は空集合, $(p, 0)$ ($p = 1, 2, 3$) ならば $3-p$ 次元の線形集合, $(1, 1)$ ならば二平面であり, $(2, 1)$ ならば錐である。点 $P = [x_0 : y_0 : z_0 : w_0]$ (x_0, y_0, z_0, w_0 の最初に 0 でないものが 1¹) に対して

$$\text{pp}(M, P) = (x, y, z, w)M^t(x_0, y_0, z_0, w_0) \quad (1)$$

とする。

定理 1. $\text{pp}(M, P)$ が恒等的に 0 になる (x, y, z, w の係数がすべて 0) のは M の符号が $(1, 0)$, $(2, 0)$ または $(3, 0)$ で P が $\Theta(M)$ 上の点であるか $\Theta(M)$ が錐で P がその頂点のときか $\Theta(M)$ が二平面で P がそれらの交線上にあるときだけである。

以下, M の符号は $(3, 1)$, $(2, 2)$ または $(2, 1)$ と仮定する。 P を $\Theta(M)$ が錐のときはその頂点ではない点, それ以外のときは任意の点とする。 $\text{pp}(M, P) = 0$ で表される平面を $\Theta(M)$ に関する P の極平面と呼ぶ。 M の符号が $(3, 1)$ または $(2, 2)$ のときは逆に, P をこの平面の極と呼ぶ。定義から明らかに P が $\Theta(M)$ に関する P の極平面上の点であるための必要十分条件は P が $\Theta(M)$ 上にあることである。このとき, P の極平面は $\Theta(M)$ の P での接平面である。 $V \in \mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$ に対して $VM = (0, 0, 0, 0)$ であるとすれば, 任意の数 s と任意の $W \in \mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$ に対して

$$(sV + W)M = WM, \quad (sV + W)M^t(sV + W) = WM^tW$$

であるから, 次が成り立つ。

補題 2. M を符号が $(2, 1)$ の 4 次対称行列とする。 P を $\Theta(M)$ の頂点, Q を P と異なる任意の点とすると, P と Q を通る直線 l 上の P 以外のすべての点の $\Theta(M)$ に関する極平面は一致する。さらに, Q が $\Theta(M)$ 上の点ならば, l は $\Theta(M)$ に含まれる。

補題 3. M を符号が $(3, 1)$ の 4 次対称行列とする。 $\Theta(M)$ と平面は交わらない, 一点で接する, 二直線ではない二次曲線で交わるのいずれかである。

補題 4. M を符号が $(2, 2)$ の 4 次対称行列とする。 $\Theta(M)$ と任意の平面 H は二次曲線で交わる。その交わりが点 P で交わる二直線であるための必要十分条件は H が $\Theta(M)$ の P での接平面であることである。

¹この条件は $\text{pp}(M, P)$ が一意に決まるためだけである。

二つの二次曲面が点 P で交わり, P での接平面が一致するとき, この二つの二次曲面は P で接するという。 $g = a_1x + a_2y + a_3z + a_4w$, $h = b_1x + b_2y + b_3z + b_4w$,

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_4), \quad B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$$

とすれば

$$\begin{aligned} gh &= (x, y, z, w) {}^tAB {}^t(x, y, z, w) = (x, y, z, w) {}^tBA {}^t(x, y, z, w) \\ &= \frac{1}{2}(x, y, z, w)({}^tAB + {}^tBA) {}^t(x, y, z, w) \end{aligned}$$

であり, ${}^tAB + {}^tBA$ は 4 次対称行列であるから, $\Theta({}^tAB + {}^tBA)$ は $g = 0$ と $h = 0$ で表される二平面である。また,

$$\begin{aligned} &(x, y, z, w)({}^tAB + {}^tBA) {}^t(x_0, y_0, z_0, w_0) \\ &= (x, y, z, w) {}^tAB {}^t(x_0, y_0, z_0, w_0) + (x, y, z, w) {}^tBA {}^t(x_0, y_0, z_0, w_0) \\ &= gh(x_0, y_0, z_0, w_0) + hg(x_0, y_0, z_0, w_0) \end{aligned}$$

であるから, 次が成り立つ。

定理 5. $(x, y, z, w)M {}^t(x, y, z, w) + gh = 0$ で表される曲面 $\Theta(M + \frac{1}{2}({}^tAB + {}^tBA))$ に関する点 P での極平面は $\text{pp}(M, P) + \frac{1}{2}(g(P)h + h(P)g) = 0$ で表される。したがって, P が $g = 0$ と $h = 0$ で表される平面の交線上の点ならば, $\Theta(M)$ と $\Theta(M + \frac{1}{2}({}^tAB + {}^tBA))$ のそれぞれに関する P の極平面は一致する。さらに, P が $\Theta(M)$ と $g = 0$ で表される平面の交点または交線上の点ならば, $\Theta(M)$ と $(x, y, z, w)M {}^t(x, y, z, w) \pm g^2 = 0$ で表される曲面 $\Theta(M \pm {}^tAA)$ は P で接する。

以下, M の符号は $(3, 1)$ または $(2, 2)$ とする。 $P = [x_0 : y_0 : z_0 : w_0]$ を $\Theta(M)$ 上にない点とし,

$$\begin{aligned} d &= \text{pp}(M, P)(P) = (x_0, y_0, z_0, w_0)M {}^t(x_0, y_0, z_0, w_0) \quad (\neq 0), \\ M_0 &= M - \frac{1}{d}M {}^t(x_0, y_0, z_0, w_0) (x_0, y_0, z_0, w_0)M, \quad \Gamma(M, P) = \Theta(M_0) \end{aligned}$$

とする。

定理 6. $\Theta(M)$ と P の極平面が交わらないときは $\Gamma(M, P)$ は P の一点であるが, 交わるときは P を頂点とする錐であり, $\Theta(M)$ と P の極平面の交わりの各点で $\Theta(M)$ と接する。

証明 $M_0 {}^t(x_0, y_0, z_0, w_0) = {}^t(0, 0, 0, 0)$ である。 $\Theta(M)$ と P の極平面が交わらないと仮定する。補題 3, 4 より, M の符号は $(3, 1)$ であり, P は $\Theta(M)$ の内部にある。定理 1 より, $\Gamma(M, P)$ が P の一点でなければ, P を通る直線を含むから, $\Theta(M)$ と交わる。その交点は P の極平面上の点でもあるから, 仮定に矛盾する。

$\Theta(M)$ と P の極平面が交わるときは定理 1, 5 より, 定理の主張が成り立つ。 ■

逆に, 次が成り立つ。

定理 7. 点 P を頂点とする錐 Γ と $\Theta(M)$ が 3 点以上で接するならば, $\Gamma = \Gamma(M, P)$ である。

証明 Γ と $\Theta(M)$ が点 Q_1, Q_2, Q_3 で接するとする。 H を $\Theta(M)$ に関する P の極平面とする。 Q_i での $\Theta(M)$ の接平面は Γ の接平面でもあるから, P を通る。したがって, Q_i は H 上にある。 Γ と $\Gamma(M, P)$ のそれぞれと H との交わりは Q_1, Q_2, Q_3 の三点で接する二次曲線であるから, 一致する。したがって, $\Gamma = \Gamma(M, P)$ である。 ■

$ax + by + cz + dw = 0$ で表される平面 H に対して点 $[a : b : c : d]$ を H^* で表す。逆に, 点 $P = [x_0 : y_0 : z_0 : w_0]$ に対して $x_0x + y_0y + z_0z + w_0w = 0$ で表される平面を P^* で表す。定義から明らかに, $(P^*)^* = P$, $(H^*)^* = H$ であり, P が H 上の点ならば, H^* は P^* 上の点である。極平面の定義から, 次が成り立つ。

定理 8. M を符号が $(3, 1)$ または $(2, 2)$ の 4 次対称行列とする。点 P の $\Theta(M)$ に関する極平面が H ならば, P^* は $\Theta(M^{-1})$ に関する H^* の極平面である。

系 9. $\Theta(M)$ 上の点 P に対して P^* は $\Theta(M^{-1})$ の接平面であり, $\Theta(M)$ の接平面 H に対して H^* は $\Theta(M^{-1})$ 上の点である。

証明 P での $\Theta(M)$ の接平面を H とすると P は H 上の点であるから, H^* は P^* 上の点である。上の定理より P^* は $\Theta(M^{-1})$ に関する H^* の極平面であるから, H^* は $\Theta(M^{-1})$ 上の点であり, P^* は $\Theta(M^{-1})$ の接平面である。 ■

M_1 と M_2 を符号が $(3, 1)$ または $(2, 2)$ の 4 次対称行列で一方がもう一方の定数倍ではないとする。 $\Theta(M_1)$ と $\Theta(M_2)$ のどちらの上にもない点 P に対して $\Gamma(M_1, P) = \Gamma(M_2, P) \neq \{P\}$ のとき, この錐を $\Theta(M_1)$ と $\Theta(M_2)$ の共接錐と呼ぶ。

定理 10. P を頂点とする $\Theta(M_1)$ と $\Theta(M_2)$ の共接錐が存在するための必要十分条件は, $\Theta(M_1^{-1})$ と $\Theta(M_2^{-1})$ が P^* 上の二次曲線で交わることである。

証明 P を頂点とする共接錐が存在すれば, $\Theta(M_1)$ とその共接錐の各接点での接平面 H は $\Theta(M_2)$ の接平面でもあり P を通るから, H^* は P^* 上の $\Theta(M_1^{-1})$ と $\Theta(M_2^{-1})$ の交点である。したがって, $\Theta(M_1^{-1})$ と $\Theta(M_2^{-1})$ は P^* 上の曲線で交わる。

逆に, $\Theta(M_1^{-1})$ と $\Theta(M_2^{-1})$ が P^* 上の二次曲線で交われば, その交線上の各点 Q に対して Q^* は P を通る $\Theta(M_1)$ と $\Theta(M_2)$ の共通の接平面である。その接平面は $\Gamma(M_1, P)$ と $\Gamma(M_2, P)$ の接平面でもある。したがって, $\Gamma(M_1, P) = \Gamma(M_2, P)$ である。 ■

系 11. $\Theta(M_1)$ と $\Theta(M_2)$ の共接錐はたかだか二つである。

証明 上の定理の P は $\Theta(M_i)$ 上の点ではないから, P^* は $\Theta(M_i^{-1})$ の接平面ではない。 $[x_0 : y_0 : z_0 : w_0]$ を P^* 上の点で $\Theta(M_i^{-1})$ 上にはないとする。

$$c_i = (x_0, y_0, z_0, w_0)M_i^{-1}{}^t(x_0, y_0, z_0, w_0)$$

とすれば, $\Theta(c_2M_1^{-1} - c_1M_2^{-1})$ は P^* を既約成分に持つ。

c_1, c_2, d_1, d_2 を $c_1d_2 \neq c_2d_1$ を満たす実数で, $\Theta(c_1M_1^{-1} - c_2M_2^{-1})$, $\Theta(d_1M_1^{-1} - d_2M_2^{-1})$ がそれぞれ二平面 $H_1 + H_2$, $I_1 + I_2$ であるとする。 $H_1 = I_1$ ならば, $\Theta(M_1^{-1})$ も H_1 を既約成分に持つことになってしまうから, $H_1 \neq I_1$ である。 H_1 と I_1 の交線は $\Theta(M_1^{-1})$ に

も含まれるから、補題 3, 4 より、 H_1 は $\Theta(M_1^{-1})$ の接平面である。同様に、 H_2, I_1, I_2 も $\Theta(M_1^{-1})$ の接平面である。したがって、 $\Theta(c_1 M_1^{-1} - c_2 M_2^{-1})$ が二平面で少なくとも一方が $\Theta(M_1^{-1})$ の接平面ではない実数の組 (c_1, c_2) は定数倍を除いてただ一組である。 ■

定理 12. M_1, M_2, M_3 を符号が $(3, 1)$ または $(2, 2)$ の 4 次対称行列とする。 P, P_{ij} ($1 \leq i < j \leq 3$) が $\Theta(M_1), \Theta(M_2), \Theta(M_3)$ のいずれの上にもない相異なる点で

$$\Gamma(M_1, P) = \Gamma(M_2, P) = \Gamma(M_3, P), \quad \Gamma(M_i, P_{ij}) = \Gamma(M_j, P_{ij})$$

ならば、 P_{12}, P_{13}, P_{23} は一直線上にある。

証明 P^*, P_{ij}^* がそれぞれ

$$(x, y, z, w)A = 0, \quad (x, y, z, w)B_{ij} = 0$$

で表されているとする。定理 10 と系 11 より、 $j = 2, 3$ に対して M_2, M_3, B_{12}, B_{13} を定数倍に置き換えて

$$M_1^{-1} - M_j^{-1} = {}^t A B_{1j} + {}^t B_{1j} A$$

とできる。

$$M_2^{-1} - M_3^{-1} = {}^t A (B_{13} - B_{12}) + {}^t (B_{13} - B_{12}) A$$

であるから、 B_{23} は $B_{13} - B_{12}$ の定数倍である。即ち、 B_{12}, B_{13}, B_{23} は線形従属である。 ■

例 1 $P = [0 : 0 : 0 : 1], P_{12} = [1 : -1 : 0 : 0], P_{13} = [2 : 0 : -1 : 2], P_{23} = [0 : 2 : -1 : 2]$.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma(M_i, P) = \Theta\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \quad \Gamma(M_1, P_{12}) = \Theta\left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right),$$

$$\Gamma(M_1, P_{13}) = \Theta\left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right), \quad \Gamma(M_2, P_{23}) = \Theta\left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right).$$