

二次曲線束にまつわる小話

実射影平面¹の四角形 $ABCD$ のすべての頂点を通る二次曲線の集合を二次曲線束と呼び、 $q(ABCD)$ で表す。本稿ではこの二次曲線束に関連したいくつかの事実を紹介する。

1 極と極線

a, b, c, d, e, f を実数とし、 Θ を

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad (1)$$

で表される二次曲線とする。この節では Θ は二直線ではないと仮定する。

$$ax_0x + bx_0y + by_0x + cy_0y + dx + ey + dx_0 + ey_0 + f = 0 \quad (2)$$

で表される直線²を点 (x_0, y_0) の Θ に関する極線という。逆に、点 (x_0, y_0) を (2) で表される直線の Θ に関する極という。 (x_0, y_0) が Θ 上の点ならば、(2) の式は (x_0, y_0) での Θ の接線を表している。(1), (2) の左辺の x, y にそれぞれ x_0, y_0 を代入した式は等しいから、次が成り立つ。

定理 1. 点 P に対して P の Θ に関する極線上に P があるための必要十分条件は P が Θ 上にあることである。

点 (x_1, y_1) が (2) で表される直線上にあれば、

$$ax_0x_1 + bx_0y_1 + bx_1y_0 + cy_0y_1 + dx_0 + dx_1 + ey_0 + ey_1 + f = 0$$

が成り立つ。この式は (x_0, y_0) と (x_1, y_1) とに関して対称であるから、次が成り立つ。

定理 2. 点 P_1, P_2 の Θ に関する極線をそれぞれ L_1, L_2 とすれば、 P_1 が L_2 上にあるための必要十分条件は P_2 が L_1 上にあることである。

定理 3. 点 P から Θ に二本の接線が引けると、それらの接点を通る直線は P の Θ に関する極線である。

証明 P から Θ への接線の接点を P_1, P_2 とすれば、 P_1, P_2 のそれぞれの Θ に関する極線上に P がある。したがって、上の定理より、 P の Θ に関する極線上に P_1, P_2 がある。即ち、直線 P_1P_2 は P の Θ に関する極線である。 ■

¹実射影平面を知らなければ、普通の平面上の話として読んで貰えばよい。そのため、非同次座標を用いて記述する。

²次節で述べるように (2) の左辺が恒等的に 0 になるのは Θ が二直線で (x_0, y_0) がその交点のときだけである。

2 二次曲線束と対合

P_1, P_2, P_3, P_4 を平面上の相異なる点でどの 3 点も一直線上にないとする。 $M_1 = P_1P_2$, $M_2 = P_3P_4$ とし, M_1 と M_2 の交点を R とする。 P_1P_3 と P_2P_4 の交点を S とし, P_1P_4 と P_2P_3 の交点を T とする。即ち, R, S, T は完全四角形 $P_1P_2P_3P_4$ の対角点である。 Θ を $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属す二直線ではない曲線とし, Θ の P_i での接線を L_i とする。 L_i と L_j の交点を Q_{ij} とする。

定理 4. R, S, Q_{14}, Q_{23} は一直線上にある。

証明 二次式 f , 一次式 l_i, m_j により, Θ, L_i, M_j がそれぞれ $f = 0, l_i = 0, m_j = 0$ で表されているとする。 A を P_1 と異なる L_1 上の点とすれば,

$$f - \frac{f(A)}{m_1(A)^2} m_1^2 = 0$$

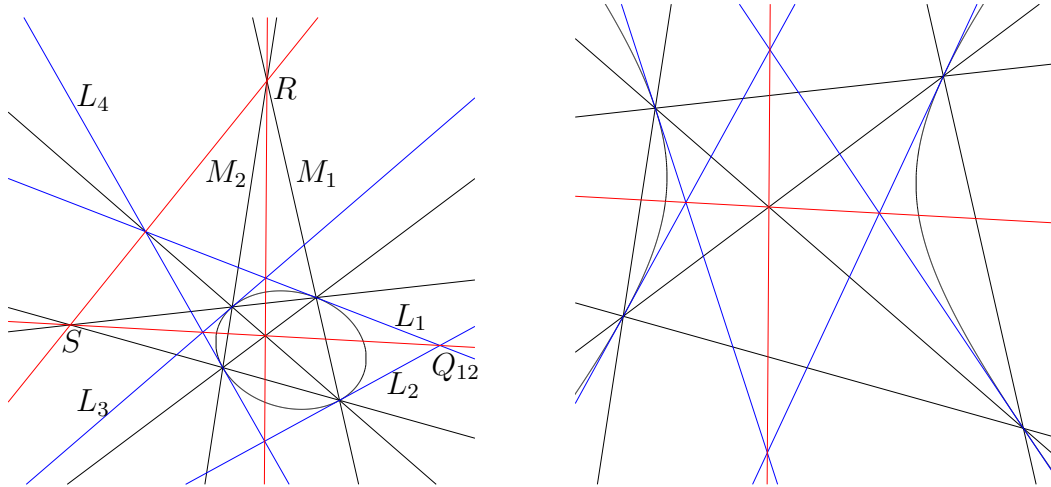
で表される二次曲線は P_1, P_2 で Θ に接し, A を通るから, 二直線 L_1 と L_2 の和である。したがって, m_1, l_1 を実数倍に置き換えて

$$f = l_1l_2 - \epsilon_1 m_1^2 \quad (\epsilon_1 = \pm 1)$$

であるとしてよい。同様に, $f = l_3l_4 - \epsilon_2 m_2^2 \quad (\epsilon_2 = \pm 1)$ としてよいから,

$$l_1l_2 - l_3l_4 = \epsilon_1 m_1^2 - \epsilon_2 m_2^2 \quad (3)$$

となる。ここで, ϵ_1 と ϵ_2 が異符号ならば, 上の式の右辺は R でしか 0 にならないが, 左辺は $Q_{13}, Q_{14}, Q_{23}, Q_{24}$ で 0 になる。したがって, ϵ_1 と ϵ_2 は同符号であり, $l_1l_2 - l_3l_4 = 0$ は R で交わる二直線を表す。 $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ に対して Q_{ij} と Q_{ik} を通る直線 L_i は R を通らないから, R, Q_{13}, Q_{24} が一直線上にあり, R, Q_{14}, Q_{23} も一直線上にある。同様に, S, Q_{12}, Q_{34} が一直線上にあり, S, Q_{14}, Q_{23} も一直線上にある。 ■



T を通る二直線 P_1P_4, P_2P_3 の極は定理 3 より, それぞれ Q_{14}, Q_{23} であるから, 上の定理と定理 2 より, T の Θ に関する極線は RS であることがわかる。また, 定理 2 より, RS 上の点の Θ に関する極線は T を通る。

(1) の左辺の二次式 g と平面上の点 $P = (x_0, y_0)$ に対して (2) の左辺を $\text{pl}(g, P)$ で表す。即ち, $\text{pl}(g, P) = 0$ で表される直線は P の $g = 0$ で表される二次曲線に関する極線である。簡単な計算により, 次が成り立つことがわかる。

定理 5. (i) x, y の二次式 g, h と定数 c, d に対して $\text{pl}(cg+dh, P) = c\text{pl}(g, P) + d\text{pl}(h, P)$.
(ii) x, y の一次式 l, m に対して $2\text{pl}(lm, P) = l(P)m + m(P)l$.

(2) の左辺は

$$(x, y, 1) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に等しいから, $\text{pl}(g, (x_0, y_0))$ が恒等的に 0 になるならば, $g = 0$ で表される曲線は二直線であり, 上の定理の (ii) により (x_0, y_0) はその交点である。次に, $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属す相異なる二次曲線 Θ_1, Θ_2 に関する点 P の極線が同じ直線であるとする。 Θ_i が $g_i = 0$ で表されているとすれば, 0 でない実数 c_i が存在して $\text{pl}(c_1g_1 + c_2g_2, P) = c_1\text{pl}(g_1, P) + c_2\text{pl}(g_2, P)$ が恒等的に 0 になる。したがって, P は完全四角形 $P_1P_2P_3P_4$ の対角点 R, S, T のいずれかである。

P を R, S, T のいずれとも異なる点とする。 $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属す二直線ではなく相異なる曲線 Θ_1, Θ_2 に関する P の極線の交点を P° とする。このとき, $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属す任意の曲線に関する P の極線は P° を通る。何故ならば, Θ_i が $g_i = 0$ で表されていれば, $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属す任意の曲線は [1, 第 7 章, 定理 9.1] より, 実数 c_i により $c_1g_1 + c_2g_2 = 0$ で表され, $\text{pl}(c_1g_1 + c_2g_2, P) = c_1\text{pl}(g_1, P) + c_2\text{pl}(g_2, P)$ も P° で 0 になる。定理 2 より, P が ST 上の点であるための必要十分条件は $P^\circ = R$ である。さらに, 定理 2 より, 次が成り立つから, 平面から三直線 RS, ST, TR を除いた領域に制限すれば, 写像 $P \rightarrow P^\circ$ は対合である。

定理 6. P が RS, ST, TR のいずれの上にもない点ならば, $(P^\circ)^\circ = P$ である。

定理 7. P を R, S, T と異なる点とする。 $P^\circ = P$ となるための必要十分条件は P が P_1, P_2, P_3, P_4 のいずれかであることである。

証明 十分条件であることは定理 1 より明らかである。 $P^\circ = P$ ならば, P は $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属するすべての曲線上にあるから, P_1, P_2, P_3, P_4 のいずれかである。 ■

L を定直線とし, $\Lambda(L)$ を $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属する曲線に関する L の極の集合とする。[1, 第 7 章 定理 9.2] に, $\Lambda(L)$ は二次曲線であるとしてあるが, もう少し詳しく調べてみる。上述したように, $\Lambda(ST) = \{R\}$ であり, L が R を通り RS, RT と異なる直線ならば, $\Lambda(L) = ST$ である。 L が R, S, T を通らない直線ならば, $\Lambda(L)$ は R, S, T を通る二直線ではない二次曲線である。 $P \in \Lambda(L) \setminus \{R, S, T\}$ ならば, P° は L と他の直線との交点であるから, L 上の点であるが, 逆に次も成り立つ。

定理 8. L が R, S, T を通らない直線ならば, L 上の任意の点 P に対して P° は $\Lambda(L)$ 上の点である。

証明 P が RS , ST または TR 上にあれば, P° はそれぞれ T , R または S である。以下, P は RS , ST , TR のいずれの上にもないとする。 g, h を $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属す相異なる曲線の定義式とする。 P° は R, S, T のいずれとも異なるから, 定理 6 より, $\text{pl}(g, P^\circ) = 0$, $\text{pl}(h, P^\circ) = 0$ は P で交わる相異なる直線を表す。したがって, 同時に 0 ではないある定数 c, d により, $c\text{pl}(g, P^\circ) + d\text{pl}(h, P^\circ) = 0$ は L を表す。定理 5 (i) より, $cg + dh = 0$ で表される曲線に関する P° の極線は L であるから, $P^\circ \in \Lambda(L)$ である。 ■

L を R, S, T を通らない直線とする。 L が $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属するある曲線に P で接していれば, P はその曲線に関する L の極であるから $\Lambda(L)$ 上の点である。したがって, $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属し, L に接する曲線は高々二つである。 L と $\Lambda(L)$ が相異なる二点 P, Q で交わるとすれば, 上の定理より, P°, Q° も L と $\Lambda(L)$ の交点であるから, $P^\circ = P$, $Q^\circ = Q$ または $P^\circ = Q$, $Q^\circ = P$ である。前者ならば, 定理 7 より, L は R, S, T のいずれかを通ることになってしまうから後者である。 L と $\Lambda(L)$ が P で接するときは $P^\circ = P$ である。

定理 9. U, V を RS, ST, TR の上にない相異なる点で UV は R, S, T を通らないとすれば, $\Lambda(U^\circ V^\circ)$ は U, V を通る。

証明 仮定より, $\Lambda(UV)$ は二直線ではない二次曲線である。上の定理より, U°, V° は $\Lambda(UV)$ 上の点であるから, 直線 $U^\circ V^\circ$ は R, S, T を通らない。したがって, $\Lambda(U^\circ V^\circ)$ は二直線ではない二次曲線であり, 上の定理より, $(U^\circ)^\circ = U$, $(V^\circ)^\circ = V$ を通る。 ■

上の定理により, 対合 $P \rightarrow P^\circ$ は R, S, T を通らない直線の集合と R, S, T を通る二直線ではない二次曲線の集合の間の一対一対応を定める。

3 共通接線

$P_1P_2P_3P_4$, R, S, T は前節の通りとする。

定理 10. Θ_1, Θ_2 を $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属す相異なる曲線とする。 Θ_3 を Θ_1, Θ_2 のそれぞれと 2 点で接する二次曲線とし, Θ_i と Θ_3 の 2 接点を通る直線を M_i とする ($i = 1, 2$)。 M_1 と M_2 の交点は R, S, T のいずれかである。

証明 Θ_i は二次式 f_i により, $f_i = 0$ で表されているとし ($i = 1, 2, 3$), M_j は一次式 m_j により $m_j = 0$ で表されているとする。 f_i, m_j を実数倍に置き換えて

$$f_3 = f_1 - \epsilon_1 m_1^2 = f_2 - \epsilon_2 m_2^2 \quad (\epsilon_j = \pm 1)$$

とできるから,

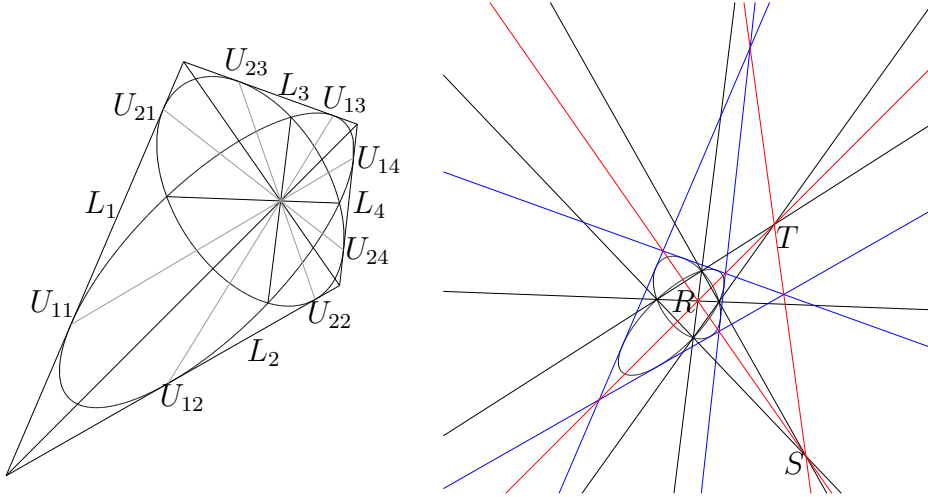
$$f_1 - f_2 = \epsilon_1 m_1^2 - \epsilon_2 m_2^2$$

が成り立つ。 ϵ_1 と ϵ_2 が異符号ならば, 上の式の右辺は M_1, M_2 の交点の一点でしか 0 にならないが, 左辺は P_1, P_2, P_3, P_4 で 0 になる。したがって, ϵ_1 と ϵ_2 は同符号であり, $f_1 - f_2 = 0$ は M_1 と M_2 の交点で交わる二直線を表す。この二直線は P_1, P_2, P_3, P_4 を通るから, R, S, T のいずれかで交わる。 ■

どの 3 本も一点で交わらない 4 直線 L_1, L_2, L_3, L_4 に対して L_1L_2 と L_3L_4 を通る直線, L_1L_3 と L_2L_4 を通る直線, L_1L_4 と L_2L_3 を通る直線を完全四辺形 $L_1L_2L_3L_4$ の対角線と呼ぶ。ここで L_iL_j は L_i と L_j の交点を表す。

定理 11. $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属す二直線ではなく相異なる二つの曲線が 4 つの共通の接線を持つとき, それらを四辺とする完全四辺形の対角線は RS, ST, RT である。

証明 二つの二次曲線を Θ_1, Θ_2 とし, それらの共通接線を L_1, L_2, L_3, L_4 とする。また, Θ_i と L_j の接点を U_{ij} とする。 $\{j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ に対して L_j と L_k の和は定理 10 の仮定を満たす二次曲線であるから, $U_{1j}U_{1k}$ と $U_{2j}U_{2k}$ は R, S, T のいずれかで交わる。 $\{j, k, l\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ に対して $U_{1j}U_{1k}$ と $U_{1j}U_{1l}$ は U_{1j} で交わるから, $U_{1j}U_{1k}$ と $U_{2j}U_{2k}$ の交点と, $U_{1j}U_{1l}$ と $U_{2j}U_{2l}$ の交点は異なる。したがって, $\{j, k, l, m\} = \{1, 2, 3, 4\}$ に対して $U_{1j}U_{1k}$ と $U_{2j}U_{2k}$ の交点と, $U_{1l}U_{1m}$ と $U_{2l}U_{2m}$ の交点は同じである³。即ち, $U_{1j}U_{1k}$ と $U_{1l}U_{1m}$ の交点は R, S, T のいずれかである。また, $U_{11}, U_{12}, U_{13}, U_{14}$ を P_1, P_2, P_3, P_4 として定理 4 を適用すれば, $U_{1j}U_{1k}$ と $U_{1l}U_{1m}$ の交点, $U_{1j}U_{1l}$ と $U_{1k}U_{1m}$ の交点, L_i と L_m の交点, L_k と L_l の交点は一直線上にある。 ■



定理 4 より, 次が成り立つ。

定理 12. $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属す二直線ではない曲線の P_1, P_2, P_3, P_4 における接線を四辺とする完全四辺形の対角線は RS, ST, TR である。

以下で, 対角線が RS, ST, TR となる完全四辺形の四辺に接し, $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属す曲線の個数について考える。一直線上の相異なる 4 点 X, Y, Z, W の複比を

$$(X, Y; Z, W) = \frac{\overline{XZ} \cdot \overline{YW}}{\overline{XW} \cdot \overline{YZ}}$$

で定義する。ここで $\overline{XZ}$ は線分 XZ の長さを表す (ただし, 向きをつけて考える, $\overline{ZX} = -\overline{XZ}$)。

定理 13. L を R, S, T を通らない直線とし, RS, ST, TR との交点をそれぞれ $U, V,$

³ $U_{1j}U_{1k}$ と $U_{2j}U_{2k}$ の交点を V_{jk} とすれば, V_{jk} は R, S, T のいずれかであり, V_{jk}, V_{jl}, V_{jm} は互いに異なり, V_{lm}, V_{jl}, V_{jm} も互いに異なるから, $V_{jk} = V_{lm}$ である。

W とする。 U', V', W' をそれぞれ U, V, W と異なる RS, ST, TR 上の点とすると、 U, V', W' が一直線上にあり、 U', V, W' も一直線上にあり、 U', V', W も一直線上にあるための必要十分条件は $(R, S; U, U') = (S, T; V, V') = (T, R; W, W') = -1$ となることである。

証明 (必要条件) W, W' を中心とする射影により、

$$(R, S; U, U') = (T, S; V, V') = (R, S; U', U)$$

であるから、 $(R, S; U, U') = -1$ である。同様にして、 $(S, T; V, V') = (T, R; W, W') = -1$ である。

(十分条件) $(R, S; U, U') = (T, S; V, V')$ であるから、 $RT, UV, U'V'$ は一点で交わる。即ち、 $U'V'$ は W を通る。同様にして $U'W'$ は V を通り、 $V'W'$ は U を通る。 ■

一直線上の 3 点 X, Y, Z に対して $(X, Y; Z, W) = -1$ となる同じ直線上の点 W が唯一つ存在するから、次が成り立つ。

系 14. L を R, S, T を通らない直線とすると、 L を一辺とする完全四辺形に対角線が RS, ST, TR となるものが唯一つ存在する。

定理 15. 上の系の L が四角形 $P_1P_2P_3P_4$ の頂点の一つを通れば、条件を満たす完全四辺形の 4 辺は $P_1P_2P_3P_4$ の 4 頂点を通り、 $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属し 4 辺に接する曲線は一つである。 L が $P_1P_2P_3P_4$ のどの頂点も通らなければ、 $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属し条件を満たす完全四辺形の 4 辺に接する曲線は二つ以下 (複素射影平面では丁度二つ) である。

証明 上の系の L が P_1 を通るとする。 $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属す曲線はすべて P_1 を通るから、 L に接するものは P_1 で接する。直線 $P_1P_2, P_3P_4, P_1P_3, P_2P_4$ がそれぞれ $l_1 = 0, l_2 = 0, l_3 = 0, l_4 = 0$ で表されているとする。 A を P_1 と異なる L 上の点とし、

$$g = l_4(P_1)l_3(A)l_1l_2 - l_2(P_1)l_1(A)l_3l_4$$

とする。 $g = 0$ で表される二次曲線 Θ は $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属し、定理 5 の (i), (ii) により、 $(\text{pl}(g, P_1))(A) = 0$ であるから、 Θ の P_1 における接線は L である。また、[1, 第 7 章 定理 9.1] より、 $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属し、 L に接する曲線は Θ だけである。したがって、定理 12 より、系 14 の L を一辺とする完全四辺形の 4 辺は P_1, P_2, P_3, P_4 を通り、 $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属し 4 辺に接する曲線は Θ の一つである。

上の系の L が P_1, P_2, P_3, P_4 のいずれも通らないとする。定理 8 の後に述べたように $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属し L に接する曲線は高々二つ (複素射影平面上では丁度二つ) であり、定理 11 と系 14 より、 L を一辺とし、対角線が RS, ST, TR である完全四辺形はそれらに接する。 ■

4 附録

L が R, S, T を通らない直線するとき、 $L^\circ = \{P^\circ \mid P \in L\}$ が R, S, T を通る二次曲線であることを証明する。 l_{ij} を直線 P_iP_j の定義式とする。 $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ に対して、

$l_{ij}l_{kl} = 0$ で表される 2 直線は $q(P_1P_2P_3P_4)$ に属すから, R, S, T と異なる点 P に対して $pl(l_{ij}l_{kl}, P)(P^\circ) = 0$ である。したがって, 定理 5 の (ii) より,

$$l_{ij}(P)l_{kl}(P^\circ) + l_{kl}(P)l_{ij}(P^\circ) = 0 \quad (4)$$

が成り立つ。 l_{12}, l_{13} を定数倍に置き換えて RT, ST はそれぞれ $l_{12} - l_{34} = 0, l_{13} - l_{24} = 0$ で表されるとする。 RS と P_1P_4, P_2P_3 との交点をそれぞれ U, V とする。 R, S を中心とする射影により,

$$(P_1, P_4; U, T) = (P_2, P_3; V, T) = (P_4, P_1; U, T)$$

であるから $(P_1, P_4; U, T) = -1$ である。 $\overline{P_1U} : \overline{P_1T} = l_{12}(U) : l_{12}(T), \overline{P_4U} : \overline{P_4T} = l_{34}(U) : l_{34}(T)$ であるから,

$$\frac{l_{12}(U)l_{34}(T)}{l_{12}(T)l_{34}(U)} = -1$$

である。 $l_{12}(T) = l_{34}(T)$ であるから, $l_{12}(U) = -l_{34}(U)$ である。したがって, RS は $l_{12} + l_{34} = 0$ で表される。同様に RS は $l_{13} + l_{24} = 0$ でも表される。したがって, l_{12}, l_{34} を同じ定数倍に置き換えて $l_{12} + l_{34} \equiv l_{13} + l_{24}$ としてよい。

$$X = \frac{l_{12} - l_{34}}{l_{12} + l_{34}}, \quad Y = \frac{l_{13} - l_{24}}{l_{13} + l_{24}}$$

とすれば, $X(P_1) = X(P_2) = Y(P_1) = Y(P_3) = -1, X(P_3) = X(P_4) = Y(P_2) = Y(P_4) = 1$ である。また, (4) より RS, ST, TR 上にない点 P に対して $X(P)X(P^\circ) = 1, Y(P)Y(P^\circ) = 1$ である。 L を R, S, T を通らない直線とする。 L は $a \neq b, c \neq 0, a + b + c \neq 0$ を満たす定数により, $al_{12} + bl_{34} + cl_{13} = 0$ で表される⁴。この式は

$$\frac{a-b}{2}(l_{12} - l_{34}) + \frac{a+b}{2}(l_{12} + l_{34}) + \frac{c}{2}(l_{13} - l_{24}) + \frac{c}{2}(l_{13} + l_{24}) = 0$$

と変形できるから, L は

$$\frac{a-b}{2}X + \frac{c}{2}Y + \frac{a+b+c}{2} = 0$$

で表される。点 P が L 上にあれば P° は

$$\frac{a-b}{2}Y + \frac{c}{2}X + \frac{a+b+c}{2}XY = 0$$

で表される曲線上にある。この式に $2(l_{12} + l_{34})(l_{13} + l_{24})$ を掛ければ

$$(a-b)(l_{13} - l_{24})(l_{12} + l_{34}) + c(l_{12} - l_{34})(l_{13} + l_{24}) + (a+b+c)(l_{12} - l_{34})(l_{13} - l_{24}) = 0$$

となるから, L° は R, S, T を通る二次曲線である。

参考文献

- [1] 福原満洲雄 「射影幾何」実教出版株式会社

⁴ $al_{12} + bl_{34} + cl_{13} = 0$ で表される直線が R, S, T を通るための必要十分条件はそれぞれ $c = 0, a = b, a + b + c = 0$ である