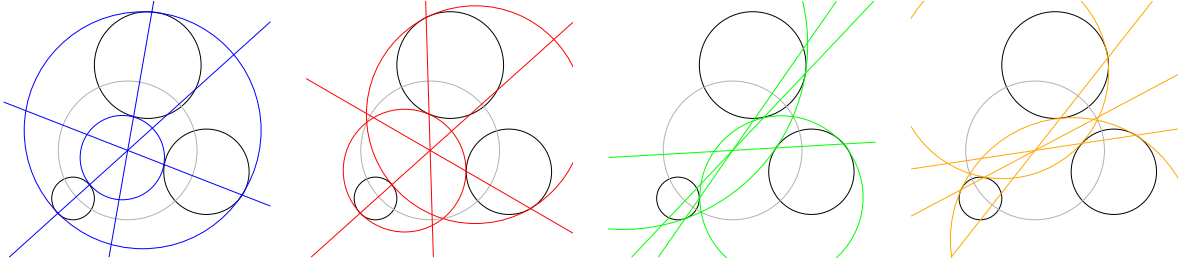


双曲平面上の三つの P 円に接する円に関する定理

ユークリッド平面上では次の定理が成り立つ。

定理 0. τ_1, τ_2 を中心が一直線上にない三つの円 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ に接する共役な二つの円, または円と直線とする。各 θ_i と τ_1, τ_2 の接点を通る三本の直線は $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ の根心で交わる (crlt3c.html 参照)。ここで, 三つの円の根心とはそれらに関するベキが等しい点である。



双曲平面上では方べきの定理は (少なくともそのままの形では) 成り立たないが, 二つの P 円に対して直交する P 円, 極限円, 等距離曲線の中心の軌跡として根軸が, 三つの P 円に対して直交する P 円, 極限円または等距離曲線の中心として根心も定義でき, 上の定理と同様な定理が成り立つことを以下で示す。[1] の記号 ([symbol_HbG.pdf](#)) を使う。

定理 1. l を $\bar{0}$ でない V の元とし, 実数 d に対して $f(x, y) = 2l - d(x^2 + y^2 - 1)$ とする。P 点 $[m]$ ($m \in V_-$) が $f = 0$ で表される円または直線上にあるための必要十分条件は $l \cdot m = d$ である。また, Γ 上の点 $[m]$ ($m \in V \setminus \{\bar{0}\}, m^2 = 0$) が $f = 0$ で表される円または直線上にあるための必要十分条件は $l \cdot m = 0$ である。

証明 $l = a_0x + b_0y + c_0(x^2 + y^2 + 1)$, $m = ax + by + c(x^2 + y^2 + 1) \in V_-$ とする。 $c > 0$, $a^2 + b^2 - 4c^2 = -1$ であるから, $a^2 + b^2 > 0$ のときは $-2c + 1 \neq 0$ であり,

$$[m] = \left(\frac{-2c+1}{a^2+b^2}a, \frac{-2c+1}{a^2+b^2}b \right),$$

$$\left(\frac{(-2c+1)a}{a^2+b^2} \right)^2 + \left(\frac{(-2c+1)b}{a^2+b^2} \right)^2 - 1 = \frac{4c^2 - 4c + 1 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{2(-2c+1)}{a^2 + b^2},$$

$$\begin{aligned} l([m]) &= \frac{-2c+1}{a^2+b^2}(a_0a + b_0b) + \frac{c_0}{a^2+b^2}(4c^2 - 4c + 1 + a^2 + b^2) \\ &= \frac{-2c+1}{a^2+b^2}(a_0a + b_0b - 4c_0c) = \frac{-2c+1}{a^2+b^2}l \cdot m \end{aligned}$$

である。 $a = b = 0$ のときは $c = \frac{1}{2}$, $l \cdot m = -2c_0$, $f([m]) = f(0, 0) = 2c_0 + d$ である。後半の主張も同様の計算で証明できる。 ■

系 2. P 点 $[l]$ ($l \in V_-$) を中心とし半径が r の P 円は

$$2l + \frac{e^r + e^{-r}}{2}(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

で表される。逆に, V_- の元 l と 1 より大きい実数 d に対して $2l + d(x^2 + y^2 - 1) = 0$ で表される円は $[l]$ を中心とする P 円で P 円としての半径は d のみにより, $[l]$ にはよらない。

証明 前半の主張は [1, 定理 3.4] と上の定理より成り立つ。1 より大きい実数 d に対して $l \cdot m = -d$ を満たす V_- の元 m は存在するが, $l \cdot m = 0$, $m^2 = 0$, $m \neq \bar{0}$ を満たす V の元 m は存在しないから, 上の定理より $2l + d(x^2 + y^2 - 1) = 0$ で表される円は Δ に含まれる。また, [1, 定理 3.4] より P 円としては $[l]$ を中心とし半径は d のみによる。 ■

[1, 定理 3.5] より, 次も成り立つ。

系 3. P 直線 $[l]$ ($l \in V_+$) を中心とし半径 ($[l]$ からの距離) が r の等距離曲線は

$$2l \pm \frac{e^r - e^{-r}}{2}(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

で表される円または直線の Δ に含まれる部分である。逆に, V_+ の元 l と 0 でない任意の実数 d に対して $2l + d(x^2 + y^2 - 1) = 0$ で表される円または直線の Δ に含まれる部分は P 直線 $[l]$ を中心とする等距離曲線であり, 半径は d のみによる。

上の系の l と P 点 $[m]$ ($m \in V_-$) に対して $l \cdot m$ が正か負かで Δ は $[l]$ を境界として二つの領域に分かれるが, 等距離曲線が $l \cdot m$ が正 (負) の領域に含まれるときは前半の主張の $\pm$ は $-$ ($+$) であり, 後半の主張の d は負 (正) である。

定理 4. $l = ax + by + c(x^2 + y^2 + 1)$ を $l^2 = 0$, $c > 0$ を満たす V の元とする。正の実数 d に対して $l + d(x^2 + y^2 - 1) = 0$ で表される円は $[l]$ を中心とする極限円である。

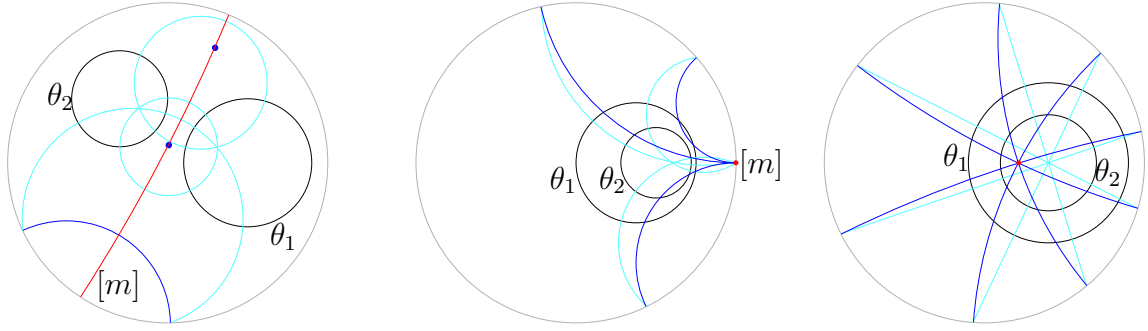
証明 $a^2 + b^2 - 4c^2 = 0$ であるから, 実数 x, y に対して

$$ax + by + c(x^2 + y^2 + 1) = c \left(\left(x + \frac{a}{2c} \right)^2 + \left(y + \frac{b}{2c} \right)^2 \right) \geq 0$$

である。したがって, $l + d(x^2 + y^2 - 1) = 0$ で表される円は Γ とは $[l] = (\frac{-a}{2c}, \frac{-b}{2c})$ でだけ交わり, それ以外は Δ に含まれる, 即ち, $[l]$ を中心とする極限円である。 ■

中心が異なる二つの円の根軸はベキが等しい点の軌跡の直線であるが, その直線上の点が二つの円の外部にあれば, その点からの二つの円への接線の長さが等しいから, その点を中心として二つの円に直交する円が存在する。そこで次のように定義する。

定義 相異なる P 円 θ_1 と θ_2 に対して $V \setminus \{0\}$ の元 m が存在して θ_1, θ_2 に直交する任意の P 円, 極限円または等距離曲線の中心 $[l]$ に対して $m \cdot l = 0$ となるとき, $[m]$ を θ_1, θ_2 の根軸と呼ぶ。



上の定義において $[m]$ が P 直線のとときには θ_1, θ_2 に直交する P 円, 極限円の中心は $[m]$ 上にあり, 等距離曲線の中心は $[m]$ に直交する。 $[m]$ が P 点または Γ 上の点のときには θ_1, θ_2 に直交するのは等距離曲線だけであり, その中心は $[m]$ を通る。 θ_1, θ_2 が中心が異なる円でそれぞれの定義式 f_1, f_2 が x^2, y^2 の係数が 1 の二次式であれば, 一次式 $f_1 - f_2$ は θ_1 と θ_2 の (普通の円としての) 根軸の定義式である。P 円での類似として次が成り立つ。

定理 5. l_1, l_2 を V_- の相異なる元, d_1, d_2 を 1 より大きい実数とし, $f_i = 2l_i + d_i(x^2 + y^2 - 1)$ ($i = 1, 2$) とするとき, $f_1 = 0$ と $f_2 = 0$ で表される P 円の根軸は $[d_2l_1 - d_1l_2]$ である。

証明 $f_i = 0$ で表される円を θ_i ($i = 1, 2$) とし, $l_0 = d_2l_1 - d_1l_2$ とする。最初に, l_0 が $x^2 + y^2 + 1$ の実数倍になる場合を考える。このとき, 実数 a, b, c_1, c_2 が存在して $f_i = c_i(x^2 + y^2 + 1) + d_i(ax + by + x^2 + y^2 - 1)$ ($i = 1, 2$) となる。 $a = b = 0$ ならば, $l_1 = l_2$ であることになってしまうから, a, b の少なくとも一方は 0 ではない。

$$(c_2 + d_2)f_1 - (c_1 + d_1)f_2 = (c_2d_1 - c_1d_2)(ax + by - 2)$$

であるから, θ_1 と θ_2 の普通の円としての根軸は $ax + by - 2 = 0$ で表される。 $a \neq 0, b \neq 0$ と仮定し, この根軸上の点 $(\frac{1}{a} + tb, \frac{1}{b} - ta)$ を中心とし, 半径が $\sqrt{(\frac{1}{a} + tb)^2 + (\frac{1}{b} - ta)^2 + 1}$ の円を τ とする。 τ と Γ の交点は Γ の直径の両端であるから, 等距離曲線 $\Delta \cap \tau$ の中心は $[l_0] = (0, 0)$ を通る。 θ_i の中心と半径はそれぞれ

$$\left(-\frac{ad_i}{2(c_i + d_i)}, -\frac{bd_i}{2(c_i + d_i)}\right), \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)d_i^2}{4(c_i + d_i)^2} - \frac{c_i - d_i}{c_i + d_i}}$$

であり,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{a} + tb + \frac{ad_i}{2(c_i + d_i)}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - ta + \frac{bd_i}{2(c_i + d_i)}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{a} + tb\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - ta\right)^2 + 1 + \frac{(a^2 + b^2)d_i^2}{4(c_i + d_i)^2} - \frac{c_i - d_i}{c_i + d_i} \end{aligned}$$

であるから τ は θ_i に直交する。したがって, θ_1 と θ_2 の P 円としての根軸は $[l_0]$ である。 $a = 0$ または $b = 0$ の場合も同様の計算で根軸は $[l_0]$ であることがわかる。

次に, l_0 は $x^2 + y^2 + 1$ の実数倍ではないが, $l_0^2 < 0$ の場合を考える。 $m = \frac{\sqrt{-l_0^2}}{2}(x^2 + y^2 + 1)$ とし, V の線形変換 β を

$$\beta(l) = l - \frac{2l \cdot (l_0 - m)}{(l_0 - m)^2}(l_0 - m)$$

と定義する。 $d_2\beta(l_1) - d_1\beta(l_2) = \beta(l_0) = m$ であるから $[\beta(l_1)]$, $[\beta(l_2)]$ を中心として半径がそれぞれ θ_1 , θ_2 と同じ P 円の根軸は $[m]$ である。[1, 43 ページの (iv) と定理 3.4] より, Δ 上の点 $[l]$ ($l \in V_-$) を $[\beta(l)]$ に移す写像は距離を変えないから, θ_1 と θ_2 の根軸は $[l_0]$ である。

次に, $l_0^2 = 0$ の場合を考える。 $l_0 = ax + by + c(x^2 + y^2 + 1)$ とする。 l_0 は $\bar{0}$ ではないから, $c \neq 0$ である。 $[l_0] = (-\frac{a}{2c}, -\frac{b}{2c})$ は Γ 上の点であり, $d_2f_1 - d_1f_2 = 0$ を満たす点は $[l_0]$ だけである。したがって, $[l_0]$ は θ_1 と θ_2 の (普通の円としての) 焦点であるから, θ_1 と θ_2 に直交する円は $[l_0]$ を通り, その円に含まれる等距離曲線の中心も $[l_0]$ を通る。

次に, $[l_0]$ が Γ の直径の場合を考える。このとき, $d_2f_1 - d_1f_2 = 2l_0$ は x, y の一次式であるから, θ_1 と θ_2 の (普通の円としての) 根軸は $[l_0]$ を含む直線である。その直線を L とすれば, θ_1 と θ_2 に直交する円は L に直交するから, その円に含まれる P 円, 極限円または等距離曲線の中心は $[l_0]$ 上にあるか直交する。したがって, P 円 θ_1 と θ_2 の根軸は $[l_0]$ である。 $l_0^2 > 0$ の場合は $m = \sqrt{l_0^2}x$ として $l_0^2 < 0$ の場合と同様に証明できる。 ■

系 2 と上の定理より, 2 点で交わる二つの P 円の根軸は 2 交点を通る P 直線である。また, 二つの P 円が一点で接するならば, 根軸は同じ点で両 P 円に接する P 直線である。

系 6. θ_1, θ_2 を中心が異なる P 円とし, L をそれらの中心を通る P 直線とすれば, θ_1 と θ_2 の P 円としての根軸は P 直線ならば L に直交し, P 点または Γ 上の点ならば L 上にある。

証明 $[l_i]$ ($l_i \in V_-$) を θ_i の中心とし ($i = 1, 2$), $l = l_1 * l_2$ とすれば $L = [l]$ である。 θ_1 と θ_2 の根軸を $[m]$ ($m \in V \setminus \{\bar{0}\}$) とすれば, 上の定理より m は l_1 と l_2 の一次結合であるから $m \cdot l = 0$ である。 ■

系 7. $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を相異なる P 円とし, $[m_{ij}]$ を θ_i と θ_j の根軸とすれば, m_{12}, m_{23}, m_{31} は一次従属である。

証明 θ_i の中心を $[l_i]$ ($l_i \in V_-$) とすれば, 系 2 より 1 より大きい実数 d_i により, θ_i は $2l_i + d_i(x^2 + y^2 - 1) = 0$ で表される。上の定理より $m_{ij} = d_j l_i - d_i l_j$ としてよい。 $d_3 m_{12} + d_1 m_{23} + d_2 m_{31} = 0$ であるから系が成り立つ。 ■

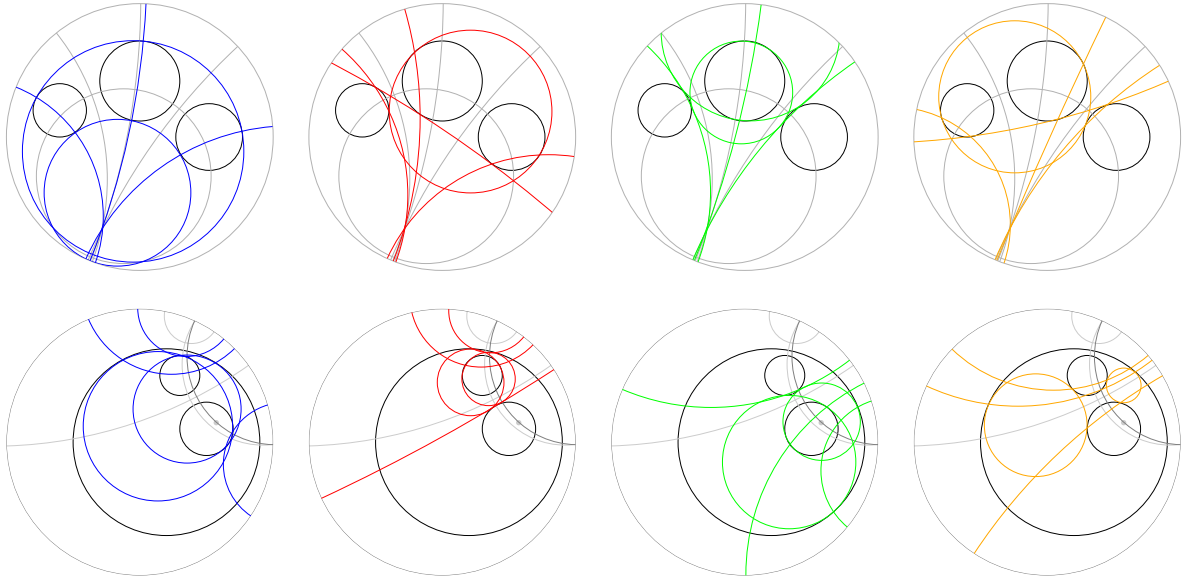
上の系において $[m_{12}], [m_{23}], [m_{31}]$ が互いに異なるならば $n \cdot m_{12} = n \cdot m_{23} = n \cdot m_{31} = 0$ となる $\bar{0}$ ではない V の元 n が定数倍を除いて唯一つ存在する。

定義 上の n に対して $[n]$ を P 円 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ の **根心** と呼ぶ。

三つの根軸 $[m_{12}], [m_{23}], [m_{31}]$ がすべて P 直線であり, 交わるときは $[n]$ は P 点または Γ 上の点であるが, それ以外のときは P 直線である。根心 $[n]$ が P 点で $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ の中の一つの θ_i の内部にあれば, $1 \leq j \leq 3, j \neq i$ に対して根軸 $[m_{ij}]$ は $[n]$ を通る P 直線であるから θ_i と 2 点で交わり, 定理 5 より θ_j と同じ点で交わるから, $[n]$ は θ_j の内部にもある。したがって, このとき $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ のどの二つも 2 点で交わり, その交点を通る 3 直線の交点が根心である。また, 根心が θ_i 上の P 点ならば, 他の P 円上の P 点でもあり, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ のどの二つも 2 点で交わるか一点で接する。根心 $[n]$ が P 直線で三つの P 円のい

いずれかの中心を通れば, 根軸 $[m_{ij}]$ は $[n]$ に直交するか $[n]$ 上にあるから, 系 6 より $[n]$ は他の二つの P 円の中心も通る。根心が三つの P 円の外部にある P 点, Γ 上の点または三つの P 円の中心を通らない P 直線ならば, 根心を中心として $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ のいずれにも直交する P 円, 極限円または等距離曲線が存在する。

定理 8. $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を三つの根軸が互いに異なる P 円とし, それらの根心を O とする。 τ_1, τ_2 を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ に接する P 直線, P 円, 極限円または等距離曲線でそれらを含む円または直線が共役である ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$ の普通の円としての中心が一直線上にあるときは τ_1, τ_2 を含む円または直線はその直線に関して対称である) とすれば, θ_i と τ_1, τ_2 との接点を通る P 直線は O を通るか直交する ($i = 1, 2, 3$)。



証明 最初に O が P 点 $[n]$ ($n \in V_-$) であるとする。 $n_0 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 1) \in V_-$ とし, V の線形変換 β を

$$\beta(l) = l - \frac{2l \cdot (n - n_0)}{(n - n_0)^2} (n - n_0)$$

と定義する ($n = n_0$ のときは β は恒等写像とする)。 $n_0^2 = n^2 = -1$ であるから, $\beta(n) = n_0$ である。P 点 $[l]$ ($l \in V_-$) を $[\beta(l)]$ へ移す Δ から それ自身への写像を g とする。 θ_i の中心を $[l_i]$ ($l_i \in V_-$) とすれば, 定理 1 と系 2 より, $g(\theta_i)$ は $[\beta(l_i)]$ を中心として θ_i と同じ半径の P 円である。 θ_i と θ_j の (P 円としての) 根軸を $[m_{ij}]$ ($m_{ij} \in V \setminus \{0\}$) とすれば, [1, 43 ページの (iv)] より $[\beta(m_{ij})]$ は $[n_0] = (0, 0)$ を通る P 直線であるから, Γ の直径である。したがって, それを含む直線は $g(\theta_i)$ と $g(\theta_j)$ の普通の円としての根軸であるから, $[n_0]$ は $g(\theta_1), g(\theta_2), g(\theta_3)$ の普通の円としての根心である。一方, τ_k ($k = 1, 2$) が P 円または極限円ならば, g は距離を変えないから, θ_i ($i = 1, 2, 3$) と τ_k の一方がもう一方を含むまたは互いの外部にあるという包含関係と $g(\theta_i)$ ($i = 1, 2, 3$) と $g(\tau_k)$ のそれは同じである。また, τ_k が P 直線または等距離曲線ならば, 系 3 より τ_k の中心 $[m_k]$ ($m_k \in V_+$) に対して実数 d が存在して τ_k 上の任意の点 $[l]$ ($l \in V_-$) に対して $l \cdot m_k = d$ となる (τ_k が P 直線のときは $\tau_k = [m_k]$, $d = 0$) から, Δ はその上の点 $[l]$ ($l \in V_-$) に対して $l \cdot m_k$ が

d 以上か以下かで τ_k を境界に二つの領域に分かれる。[1, 43 ページの (iv)] より θ_i と θ_j ($1 \leq i < j \leq 3$) が τ_k の同じ側 (反対側) にあれば, $g(\theta_i)$ と $g(\theta_j)$ も $g(\tau_k)$ の同じ側 (反対側) にある。したがって, $g(\tau_1), g(\tau_2)$ を含む円または直線は $g(\theta_1), g(\theta_2), g(\theta_3)$ に関し共役である。故に, 定理 0 より $g(\theta_i)$ と $g(\tau_1), g(\tau_2)$ の接点を通る直線 M_i は $[n_0]$ を通る。 M_i の Δ に含まれる部分は P 直線であるから, その g^{-1} による像は θ_i と τ_1, τ_2 との接点を通る P 直線であり, $g^{-1}([n_0]) = [n]$ を通る。

次に, O が Γ 上の点か P 直線であるとする。このとき, O を中心として $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ のいずれにも直交する極限円または等距離曲線が存在する。それを μ とする。 μ が線分でないときは $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ の普通の円としての根心を O' とすれば, μ を含む円の中心は O' である。 θ_i と τ_1, τ_2 の接点を通る P 直線を $[l_i]$ ($l_i \in V_+$) とする ($i = 1, 2, 3$)。 $[l_i]$ が Γ の直径ならば, μ が線分のときは μ に直交し, そうでないときは $[l_i]$ を含む直線は定理 0 より O' を通る。したがって, いずれの場合も $[l_i]$ は μ に直交するから O を通るか直交する。 $[l_i]$ が Γ の直径でないときは $l_0 = x \in V_+$ とし,

$$\beta(l) = l - \frac{2l \cdot (l_i - l_0)}{(l_i - l_0)^2} (l_i - l_0)$$

とすれば, $\beta(l_i) = l_0$ である。 $O = [o]$ ($o \in V$) とすれば, $[l_0]$ は Γ の直径であるから, $[\beta(o)]$ を通るか直交する。即ち, $l_0 \cdot \beta(o) = 0$ である。したがって, [1, 43 ページの (iv)] より $l_i \cdot o = 0$ である。 ■

参考文献

- [1] 土橋宏康著, 「双曲平面上の幾何学」, 内田老鶴圃. ISBN 978-4-7536-0200-1